

Nombre de Catalan

Année 2025 – 2026

Lucille BORUSINSKI et Chloé DROZDZ élèves de Terminale

Établissement : Lycée du Pays d'Aunis à Surgères (17)

Encadrées par : Gaëtan PREVAUD

Chercheur : Abdallah EL HAMIDI, Université de La Rochelle (17)

1. Présentation du sujet

Les nombres de Catalan forment une suite célèbre en combinatoire. Ils apparaissent dans des problèmes très variés : parenthésage d'expressions, arbres binaires, chemins de Dyck, triangulations de polygones, etc. Dans cet article, nous nous intéressons à trois propriétés fondamentales des nombres de Catalan :

- a) Leur lien avec le parenthésage d'une expression ;
- b) Leur interprétation en termes d'arbres binaires pleins ;
- c) La relation de récurrence qu'ils vérifient.

Le n -ième nombre de Catalan est défini par :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

2. C_n et parenthésage d'une expression

a) Qu'est-ce qu'une combinaison ?

Définition :

Une combinaison est une disposition non ordonnée d'un certain nombre d'éléments d'un ensemble **(1)**.

Une combinaison de p éléments parmi n est un sous-ensemble comportant p éléments choisis parmi un ensemble de n éléments.

Exemple :

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Le sous-ensemble $\{1; 2; 3\}$ est appelée une combinaison de E à 3 éléments. Le sous-ensemble $\{2; 5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments. $\{1; 2\}$ et $\{2; 1\}$ correspondent à la même combinaison.

Définition et notation :

Le nombre de combinaisons **(2)** de p éléments de E lorsque E possède n éléments est noté $\binom{n}{p}$.

Propriété :

Ce nombre est donné par la formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

b) Que signifie parenthéser une expression ?

Dans notre article, nous allons considérer des produits de $n + 1$ facteurs et des parenthèses complètes, ce qui signifie que chaque produit est effectué entre deux sous expressions **(4)**.

c) Vérification de la propriété à démontrer

Problème étudié : montrons que le nombre de façons de parenthéser une expression à $n + 1$ facteurs est donné par le nombre de catalan C_n .

- Prenons avec 2 facteurs, ce qui signifie que $n=1$ dans la formule. Donc on doit calculer :

$$C_1 = \frac{1}{1+1} \times \binom{2}{1}$$

En utilisant la formule permettant de dénombrer le nombre de combinaisons, on a :

$$\begin{aligned} \binom{2}{1} &= \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2 \\ C_1 &= \frac{1}{1+1} \times \binom{2}{1} = \frac{1}{1+1} \times 2 = 1 \end{aligned}$$

Or avec 2 facteurs, on a bien une seule façon de parenthéser : $(A \times B)$

- Prenons avec 3 facteurs, donc $n=2$ dans la formule. Donc on doit calculer :

$$C_2 = \frac{1}{2+1} \times \binom{4}{2}$$

En utilisant la formule permettant de dénombrer le nombre de combinaisons, on a :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

$$C_2 = \frac{1}{2+1} \times \binom{4}{2} = \frac{1}{2+1} \times 6 = 2$$

Or, avec 3 facteurs, on a bien 2 façons de parenthéser :

$(A \times B) \times C$	$A \times (B \times C)$
-------------------------	-------------------------

- Prenons avec 4 facteurs, donc $n=3$ dans la formule. Donc on doit calculer :

$$C_3 = \frac{1}{3+1} \times \binom{6}{3}$$

En utilisant la formule permettant de dénombrer le nombre de combinaisons, on a :

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

$$C_3 = \frac{1}{3+1} \times \binom{6}{3} = \frac{1}{3+1} \times 20 = 5$$

Or avec 4 facteurs, on a bien 5 façons de parenthéser :

$(A \times B) \times (C \times D)$	$A \times (B \times (C \times D))$	$((A \times B) \times C) \times D$
$(A \times (B \times C)) \times D$	$A \times ((B \times C) \times D)$	

- Prenons avec 5 facteurs, donc $n=4$ dans la formule. Donc on doit calculer :

$$C_4 = \frac{1}{4+1} \times \binom{8}{4}$$

En utilisant la formule permettant de dénombrer le nombre de combinaisons, on a :

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$$

$$C_4 = \frac{1}{4+1} \times \binom{8}{4} = \frac{1}{4+1} \times 70 = 14$$

Or, avec 5 facteurs on a bien 14 façons de parenthéser :

$(A \times B) \times (C \times (D \times E))$	$((A \times B) \times C) \times D \times E$	$A \times (((B \times C) \times D) \times E)$
$(A \times B) \times ((C \times D) \times E)$	$((A \times (B \times C)) \times D) \times E$	$A \times ((B \times (C \times D)) \times E)$
$((A \times B) \times C) \times (D \times E)$	$(A \times ((B \times C) \times D)) \times E$	$A \times ((B \times C) \times (D \times E))$
$(A \times (B \times C)) \times (D \times E)$	$(A \times (B \times (C \times D))) \times E$	$A \times ((B \times (C \times (D \times E)))$
	$((A \times B) \times (C \times D)) \times E$	$A \times (B \times ((C \times D) \times E))$

- Les calculs précédents montrent que les premiers nombres de Catalan correspondent bien au nombre de parenthésages possibles. Nous pensions qu'une démonstration complète

pourrait se faire par récurrence comme nous l'avons vu cette année en classe de terminale mais nous n'avons pas été en mesure de la réaliser. Pour comprendre pourquoi cette formule fonctionne, il est utile de traduire chaque parenthésage sous une forme géométrique plus maniable : l'arbre binaire plein. Cette représentation rend la structure du parenthésage immédiatement visible et ouvre la voie à une justification plus rigoureuse.

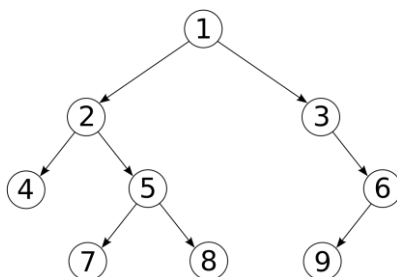
3. C_n et les arbres binaires pleins

a) Qu'est-ce qu'un arbre binaire ?

Définition :

Un arbre binaire est une structure de données qui peut se représenter sous la forme d'une hiérarchie dont chaque élément est appelé nœud, le nœud initial étant appelé racine. Dans un arbre binaire, chaque élément possède au plus deux éléments fils au niveau inférieur, habituellement appelés gauche et droit. Du point de vue de ces éléments fils, l'élément dont ils sont issus au niveau supérieur est appelé père.

Exemple :



Définition :

Un arbre binaire plein est un arbre binaire où chaque nœud interne possède exactement deux fils.

b) Vérification de la propriété à démontrer

Problème étudié : montrons que C_n compte le nombre d'arbres binaires pleins à $n+1$ feuilles.

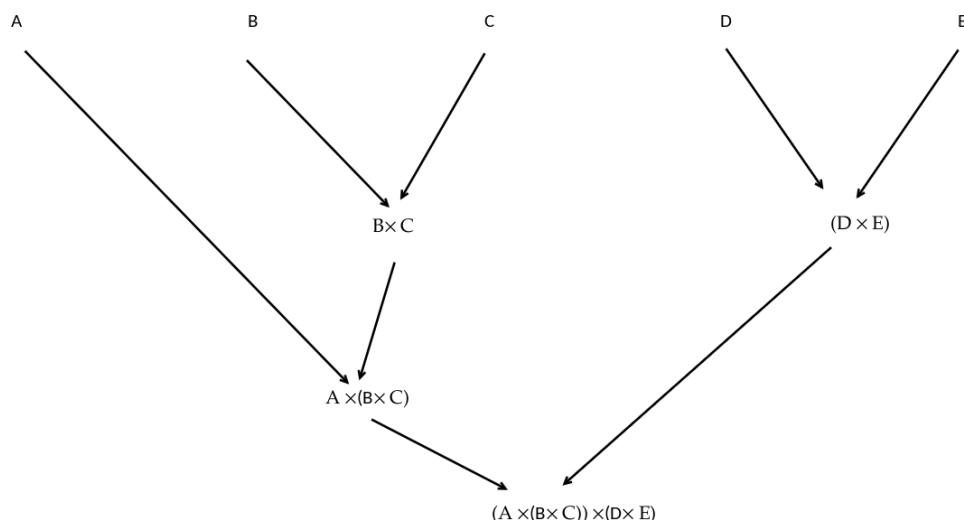
À chaque parenthésage d'une expression à $n+1$ facteurs, on peut associer un arbre binaire plein :

- Les feuilles représentent les facteurs $A, B, C, D, \dots$;
- Chaque nœud interne représente une multiplication entre deux sous-expressions.

Par exemple, le parenthésage

$$(A \times (B \times C)) \times (D \times E)$$

Correspond à l'arbre binaire suivant :



Lors du congrès de La Rochelle, un chercheur nous a expliqué qu'une démonstration reposant sur une bijection avec les arbres binaires pleins était possible : chaque parenthésage correspond à un arbre binaire dont les feuilles représentent les facteurs de l'expression. Pour montrer que cette correspondance est bien une bijection, on peut remarquer que la construction est réversible⁽⁷⁾ : étant donné un arbre binaire plein à $n+1$ feuilles, on retrouve un parenthésage unique en lisant l'arbre de bas en haut : chaque nœud interne correspond à une paire de parenthèses entourant les deux sous-expressions issues de ses fils gauche et droit. Inversement, chaque parenthésage produit un arbre unique par la même construction. Ainsi, le nombre d'arbres binaires pleins à $n+1$ feuilles est égal à C_n .

4. Relation de récurrence vérifiée par C_n

A partir de la définition explicite : $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

On en déduit que : $C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1}$

En utilisant la formule pour calculant les combinaisons : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

On va écrire la formule de C_{n+1} de manière à faire apparaître celle de $C_n = \frac{1}{n+2}$

Tout d'abord : $\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(2(n+1)-(n+1))!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \times (n+1)!}$

Comme $(n+1)! = n! \times (n+1)$ et $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$, alors en remplaçant dans la formule précédente on obtient :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \times (n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{n!(n+1)n!(n+1)} = \frac{\frac{(2n)!}{n!n!} \times (2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{\frac{(2n)!}{n!n!} \times 2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} =$$

Remplaçons dans la formule de C_{n+1} :

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+2} \times (2n)!}{n!n!} \times 2(2n+1) = \frac{\frac{1}{n+1} \times (2n)!}{n!n!} \times 2(2n+1)$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \times \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{2n!}{n!(2n-n)!} \right) = \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{2n!}{n!n!} \right)$$

$$\text{Donc } C_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1} \times (2n)! \times 2(2n+1)}{(n+2)} = \frac{C_n \times 2(2n+1)}{(n+2)}$$

On obtient donc la formule de récurrence suivante : $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \times C_n$

Cette relation de récurrence peut aussi se lire de façon combinatoire : pour construire un arbre binaire plein à $n+2$ feuilles, on peut partir d'un arbre à $n+1$ feuilles et insérer une nouvelle feuille. Le facteur $\frac{2(2n+1)}{n+2}$ traduit le nombre de façons de réaliser cette insertion. Nous n'avons pas établi cette interprétation rigoureusement, mais elle constituerait un prolongement naturel de notre travail.

5. Conclusion

Au début de nos recherches, nous pensions pouvoir démontrer directement la formule donnant le nombre de parenthésages. Nous avons d'abord commencé par calculer les premiers nombres de Catalan, avons constaté l'apparition des nombres 1, 2, 5, 14 et observé que ceux-ci comptaient bien les parenthésages possibles d'une expression. Et puis, ce n'est qu'au congrès que nous avons découvert le lien avec les arbres binaires, qui fournit une explication beaucoup plus naturelle. Enfin, nous avons établi la relation de récurrence :

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

Cette suite constitue un exemple remarquable de lien entre algèbre, combinatoire et structures arborescentes.

Notes d'édition

(1) Une combinaison compte également le nombre de sous-ensembles contenant un certain nombre d'éléments.

(2) Ici il faut plutôt parler de sous-ensemble de p éléments

(3) Pour cette formule il faut supposer $n \geq p$.

(4) Les jeunes chercheurs doivent préciser la notion de « parenthésage » :

Soit E un ensemble (par ex. $\mathbb{R}$) muni d'une opération interne $\times$ (par ex. la multiplication) sur E . Pour $A, B, C, D, \dots$ éléments de E , on appelle expression, tout éléments de E obtenu avec $\times$, à partir d'éléments

ou d'expressions de E . On construit (par récurrence) les expressions de la manière suivante :

1) $E_1 = A \times B, E_2 = C \times D$ (produit de deux éléments de E)

2) $(A \times B) \times C = (E_1) \times C, B \times (C \times D) = B \times (E_2)$ (produit d'une expression et d'un élément de E)

3) $(A \times B) \times (C \times D) = (E_1) \times (E_2)$ (produit de deux expressions)

Remarque : quand on utilise des expressions on ajoute des parenthèses mais pas quand on utilise des éléments.

(5) Ce qui fait qu'on écrit simplement $A \times B$ sans parenthèse.

(6) Il manque ici la définition de « feuille » : élément ne possédant pas de fils.

(7) La démonstration de la bijection s'obtient plus facilement en précisant la construction des arbres : Si on note A et B des éléments de E , E_1, E_2 des expressions, on a les trois cas suivants :

$$\begin{array}{c} A \searrow \\ A \times B \\ B \nearrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E \searrow \\ (E) \times B \\ B \nearrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E_1 \searrow \\ (E_1) \times (E_2) \\ E_2 \nearrow \end{array}$$