# Un zéro surprenant…

Sujet MATh.en.JEANS
Lycée Pierre Mendes-France (Vitrolles)

2019-2020

## 1 Modèle

Imaginons un échiquier de $3 \times 3$ cases, où chaque case contient un nombre entier de cacahuètes. Les cacahuètes vont alors se déplacer en suivant une règle simple : si une case contient 4 cacahuètes ou plus, alors cette case donne 1 cacahuète à chacune de ses quatre voisines (nord, est, sud, ouest). Les cacahuètes qui tombent en dehors de l'échiquier sont perdues. Par exemple :

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 0 |
| 3 | 5 | 1 |
| 2 | 0 | 2 |

$\rightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 0 |
| 5 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 |

$\rightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 |
| 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 |

Appelons *configuration* un échiquier qui contient un certain nombre de cacahuètes dans chacune de ses cases, et *configuration stable* une configuration qui contient au maximum 3 cacahuètes dans chaque case.

On peut naturellement **additionner** deux configurations stables entre elles, en :
1. additionnant case par case le contenu en cacahuètes,
2. appliquant la règle d'éboulement des cacahuètes jusqu'à obtenir de nouveau une configuration stable.

Par exemple :

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 1 |
| 1 | 0 | 2 |

$+$

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |

$=$

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 0 |
| 3 | 5 | 1 |
| 2 | 0 | 2 |

$\rightarrow \cdots \rightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 |
| 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 |

Il existe une très grande quantité[1] de configurations stables : 262 144. Nous allons en considérer seulement un sous-ensemble, que nous appelerons *configurations lourdes* : **les configurations que l'on peut obtenir par addition à partir de la configuration avec trois cacahuètes dans chaque case**. Par exemple :

1. Sauriez-vous retrouver le calcul qui mène à cette quantité ?

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&1&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 3&4&3\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&1\\\hline 3&0&3\\\hline 1&3&1\\\hline\end{array}$$

(La dernière configuration tout à droite est lourde.)

Bien, voilà le clou du spectacle : si l'on regarde les configurations lourdes comme des nombres que l'on peut additionner, alors elles ont des propriétés très similaires aux entiers relatifs ! Il s'agit d'une structure mathématiques appelée un *groupe commutatif* :

- Pour toutes configurations lourdes $a$ et $b$, on a que $a+b$ est une configuration lourde.
- Pour toutes configurations lourdes $a$, $b$ et $c$, on a $(a+b)+c = a+(b+c)$.
- Il existe une configuration lourde identité, notée $z$, c'est-à-dire telle que pour toute configuration lourde $a$, on a $a+z = a$. C'est notre **zéro** ! Le voici [2] :

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |

- Pour toute configuration lourde $a$, il existe une configuration lourde inverse $b$ telle que $a+b = z$.
- Pour toutes configurations lourdes $a$ et $b$, on a $a+b = b+a$.

# 2 Questions

Sauriez-vous trouver le zéro d'un échiquier de $4 \times 4$ cases ? Et $5 \times 5$ cases ? Puis $n \times n$ cases avec $n$ le plus grand possible ? Et même $m \times n$ cases ?

# 3 Pour progresser...

Pour vous familiariser avec le modèle vous pouvez faire quelques additions pour vous convaincre que la configuration ci-dessus est bien le zéro des configurations lourdes de l'échiquier $3 \times 3$, et essayer de démontrer pourquoi chacune des cinq propriétés d'un groupe communtatif sont vérifiées par les configurations lourdes et leur addition (certaines propriétés sont simples, d'autres difficiles à démontrer).

**Remarque :** si vous savez programmer vous pouvez gagner du temps en calculs ! Mais attention à la recherche de l'identité, car la quantité de configurations lourdes est toujours énorme...

2. Attention, on pourrait penser que la configuration qui ne contient aucune cacahuète est notre zéro, mais non, car ce n'est pas une configuration lourde.