

Une humoriste mathématicienne

Alice est une mathématicienne vivant sur une île au milieu de l’océan. Alice cherche à propager la joie et la bonne humeur autour d’elle. Connaissant une blague très amusante, elle décide de la raconter à des passants. Elle se rend dans une rue très fréquentée de sa ville et commence à la raconter: “Savez-vous ce qui est vert et qui se déplace sous l’eau ?” (et vous le savez-vous ?). Lorsque les passants entendent la réponse, ils sont pris d’un fou rire et s’empressent d’aller raconter la plaisanterie aux autres passants. La journée et la nuit passe et le lendemain, elle se rend compte que non seulement sa blague s’est propagée dans toute la ville, mais également dans toutes les villes voisines. Contente de la réaction que produit sa plaisanterie, elle décide de propager sa blague dans une autre ville plus loin, où son histoire n’a pas encore été entendue. Le lendemain, elle apprend que sa blague a été entendue dans toutes les villes voisines des villes l’ayant entendue la veille et l’avant-veille. Elle décide alors de continuer sur sa lancée jusqu’à ce que toutes les villes de son île l’ait entendue. En fait, les villes présentes sur l’île sont organisées autour d’un volcan de telle manière qu’elles sont reliées les unes aux autres par des routes, de sorte à former un cercle.

Par exemple un réseau routier possible de l’île est dessiné à la figure 1. Au premier jour, elle a raconté sa blague aux habitants de la ville 5. Le lendemain, les villes 4, 5 et 6 connaissent la blague. Elle décide de raconter sa blague aux habitants de la ville 2. Le troisième jour, cette fois-ci, les villes 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 connaissent la blague. Il ne lui reste plus alors qu’à aller dans la ville 8. Alice a donc mis 3 jours pour que sa blague soit connue dans toutes les villes de l’île.

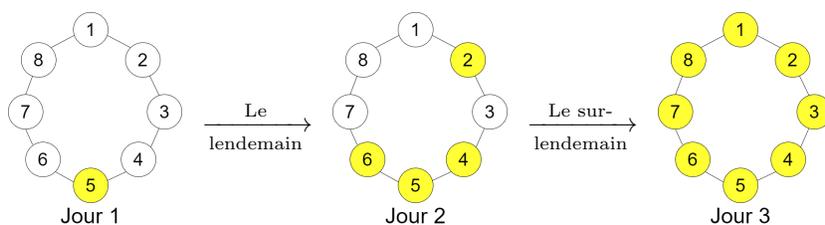


Figure 1: Alice raconte la blague dans la ville 5 le premier jour. Le lendemain elle s’est propagée aux villes 4 et 6. Le même jour, elle raconte la blague dans la ville 2. Entre le deuxième et le troisième jour, sa blague s’est propagée aux villes 1, 3 et 7 et Alice a raconté sa blague à la ville 8.

Alice souhaite récidiver avec une nouvelle blague. Comment Alice peut-elle se débrouiller pour propager sa nouvelle histoire en un nombre minimum de jours ?

Maintenant, elle se déplace sur une nouvelle île. Sur cette île, les routes reliant les villes entre elles ne forment jamais de cycle : une voiture ne peut pas tourner en rond indéfiniment sans devoir faire demi-tour. En revanche, il est possible de rejoindre n'importe quelle ville à partir d'une ville de départ. Un exemple de réseau routier possible pour cette nouvelle île est représenté sur la figure 2. Sur cet exemple, on remarque qu'il existe toujours un chemin possible pour relier deux villes différentes entre elles et qu'il n'y a pas de cycle.

Comment doit-elle procéder pour propager sa blague le plus rapidement possible ?

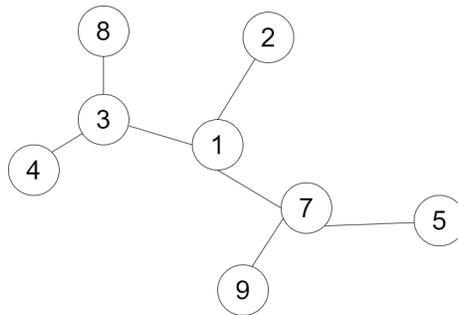


Figure 2: Exemple de réseau routier pour la deuxième île. Dans ce réseau n'y a pas de cycle et tous les habitants d'une ville peuvent se rendre dans toutes les autres villes en utilisant les routes et en passant par d'autres villes.

Alice continue son voyage et décide de se rendre sur l'île *Parfaite*. Une ville présente sur cette île peut rejoindre n'importe quelle autre ville directement par l'intermédiaire d'une route comme l'illustre l'image de gauche de la figure 3. Combien de jours au minimum faut-il à Alice pour que sa blague soit entendue dans toutes les villes de l'île ?

Sur une autre île nommée *Quasi-parfaite*, les habitants ont décidé de copier le réseau routier de l'île Parfaite. Cependant, ils ont décidé que toutes les villes ne rejoindraient pas toutes les autres villes directement. En fait, chaque ville présente sur l'île peut rejoindre toutes les autres villes directement à l'exception de k villes. La figure 3 à droite illustre ceci. Sur cette image, chaque ville est reliée à toutes les autres sauf une. Par exemple, la ville 3 n'est pas reliée directement à la ville 2 et la ville 1 n'est pas reliée directement à la ville 4. Alice décide de se rendre sur cette île pour y raconter sa blague. Combien de jour au minimum faut-il cette fois-ci à Alice pour que son histoire se répande dans toutes les villes ?



Figure 3: Exemples d'organisation des villes et des routes pour l'île *Parfaite* à gauche et pour l'île *Quasi-Parfaite* à droite. Toutes les villes de l'île parfaite sont reliées directement les unes entre elles. Toute ville de l'île quasi parfaite est ici reliée à toutes les autres villes à l'exception d'une. Par exemple la ville 3 n'est pas reliée à la ville 2 et vice-versa. Il en va de même pour les villes 1 et 4 qui ne sont pas reliées entre elles. Dans cet exemple, k vaut donc 1.

Sur l'île de Babel, il y a deux types de ville : celles qui parlent *blibla* et celles qui parlent *blabli*. Malheureusement, les gens des villes qui parlent *blibla* ne parlent pas aux gens des villes qui parlent *blabli* et vice-versa. Le blague ne se propage pas d'une ville à l'autre, si les deux villes ne parlent pas une langue commune. Un exemple de telle île est présenté figure 4 à gauche. Sur cet exemple, les villes où les habitants parlent le *blabli* sont représentées par des carrés et celles dont les habitants parlent le *blibla* par des cercles. Les habitants des villes 2 et 5, par exemple, parlent tous deux la même langue et peuvent donc communiquer entre eux. En revanche les habitants des villes 2 et 3 ne parlent pas la même langue et ne pourront donc pas se parler. Alice, qui est très cultivée, parle les deux langues évidemment. Comment doit-elle procéder pour propager sa blague quand l'île présente un agencement de villes quelconque ?

Pour finir son périple, Alice se rend dans l'île de *Polyglocie*. Certaines villes, mais pas toutes, y sont polyglottes. : les habitants y parlent les deux langues. Sur l'image de droite de la figure 4, la ville 2 est un exemple de ville polyglotte. Comment doit-elle procéder pour propager sa blague quelque soit l'agencement des villes sur l'île ?



Figure 4: À gauche, un exemple possible de routes reliant des villes sur l'île de Babel. Les villes parlant le *blabli* sont représentées par des carrés et celles parlant le *blibla* par des cercles. À droite, les villes sont situées sur l'île de Polyglocie. Les villes polyglottes y sont représentées par des cercles imbriqués dans des carrés.