MATHENJEANS 2016-2017
Lycée Angelier

Sujet n° 1. Pas de triangle unicolore
Des points, $P_{1,}$ $P_{2,}$ … sont placés sur une feuille de papier. On cherche à relier tous les couples de points avec le crayon bleu ou le rouge en évitant qu'il y ait le moindre triangle dont les trois côtés sont de même couleur (les seuls triangles dont il question sont ceux dont les sommets sont $P_{1,}$ ou P_2 ou ... .

- Combien existe-t-il de coloriages avec 4 points qui respectent la règle ? Cela dépend-il de la façon dont les 4 points sont disposés.
- Pour 5 points ? Pour 6 points ? Pour 7 points ?
- Est-il possible de respecter la règle, avec 2 couleurs, quel que soit le nombre de points (donner une preuve de la réponse donnée à cette question) ? Combien de segments arrivez-vous à tracer en respectant la règle quand le nombre de points est 6 ou 7 ou 8, … ?
- Passer éventuellement à 3 couleurs ? Jusqu'à quel nombre de points arrivez-vous à respecter la règle ?
- Existe-t-il un nombre de couleurs qui permettra de respecter la règle pour n'importe quel nombre de points ?

Sujet n° 2. Un ascenseur peu pratique.
Imaginons un ascenseur qui ne dispose que de 5 boutons : le 1er permet de revenir au rez-de-chaussée, le 2ème permet de monter de 5 étages, le 3ème permet de monter de 7 étages, le 4ème permet de descendre de 5 étages et le 5ème permet de descendre de 7 étages. Alors il peut m'amener du rez-de-chaussée au 43ème étage car 43 = 3x5 + 4x7.

- Peut-il m'amener du rez-de-chaussée au 2ème étage ? Au 247ème étage ? Plus généralement, à quels étages peut-il m'amener ?
- Que se passe-t-il si on remplace 5 et 7 par deux autres nombres entiers positifs ?
- Que se passe-t-il si on supprime le 4ème et le 5ème bouton ?

Sujet n° 3. Le bonneteau revisité
Des gobelets sont alignés. L'un d'entre eux (on ne sait pas lequel) cache un Louis d'or. Chacun des autres cache une flèche dirigée vers le gobelet cachant le Louis d'or. On est autorisé à retourner un certain nombre (noté A) de gobelets, mais on ne peut retourner qu'**un seul gobelet situé à droite** du Louis d'or (donc cachant une flèche orientée vers la gauche).L'objectif est d'imaginer une stratégie **gagnante à coup sûr**, c'est-à-dire permettant de trouver le Louis d'or quelle que soit sa position. Dans la cas A=2 et 3 gobelets, une stratégie commençant par le gobelet de droite n'est pas gagnante à coup sûr, alors que la stratégie commençant par le gobelet du milieu gagne à coup sûr.

- Imaginer une ou plusieurs stratégies gagnantes à coup sûr dans le cas de 4 ou 5 gobelets et A=3.
- Fixons le nombre de gobelets à 6. Existe-t-il une stratégie gagante à coup sûr si A=3 ? Et si A=4 ? Et s'il y a 8 gobelets et A=4 ?
- Fixons A=4. Quel est le nombre maximum de gobelets permettant l'existence d'une stratégie gagnante à coup sûr ? Comment évolue ce nombre quand on change la valeur de A ?

On pourra ensuite augmenter le nombre autorisé de gobelets retournés et situés à droite du Louis d'or. Mais il est conseillé de d'abord maîtriser parfaitement la situation décrite ci-dessus.

.../...

Sujet n° 4 Des arbres bien numérotés
On se donne un arbre mathématique, c'est-à-dire une collection de $n+1$ sommets, dont n paires sont reliées par n arêtes, et ne contenant aucun cycle. Peut-on numéroter les sommets avec tous les entiers de 0 à n, de telle sorte que la numérotation induite sur les arêtes fasse intervenir *tous* les entiers de 1 à n ? Précision : chaque arête est numérotée $|i-j|$, où i et j sont les numéros attachés à ses deux extrémités.

Sujet n° 5. Pas de somme
On a un jeu de 20 cartes numérotées 1,2,...,20. On veut les ranger dans 3 tiroirs récalcitrants, qui ne supportent pas de contenir trois cartes a,b,c telles que a+b=c.

- Peut-on effectivement ranger ses cartes en respectant les réticences des tiroirs ? Si oui, peut-on en faire de même avec 21 cartes ? Avec 22 cartes ? Avec 23 ? Avec 24 ?
- Que se passe-t-il si on n'a que 2 tiroirs ? Et si on en a 4 ?

Si on le souhaite, on peut supprimer le nombre 1 ; c'est-à-dire ranger les nombres 2, 3, 4, etc. On peut aussi interdire les produits (en plus des sommes), c'est-à-dire trois cartes distinctes a,b,c telles que a.b=c.

Sujet n° 6. Partage équitable
La face supérieure d'une bûche de Noël glacée a été garnie de plusieurs types de fruits confits qui ont été répartis à intervalle régulier, mais de façon anarchique (par exemple, 2 fraises, puis 3 mûres, etc). On suppose que le nombre de fruits de chaque type est un multiple du nombre de convives. Les convives exigent d'avoir tous autant de fruits confits d'un même type. Par exemple, s'il y a 10 fraises, 8 mûres et 2 convives, les 2 convives veulent avoir chacun 5 fraises et 4 mûres.
Le défi consiste, pour un nombre donné T de types de fruits confits et un nombre donné C de convives, à déterminer le **nombre minimum de coupes** suffisant à réaliser un partage équitable quelle que soit la disposition des fruits confits.

- Vérifier d'abord que, s'il y a 4 fraises**, 6 mûres et 2 convives**, alors 2 coupes suffisent quelle que soit la disposition. Considérer ensuite 6 fraises et 10 mûres (et toujours C=2).
- Pour un nombre pair quelconque de fraises, un nombre pair quelconque de mûres (et toujours C=2), 2 coupes suffisent-elles toujours ?
- Passer au cas T=2 et C=3 (le nombre de fraises et le nombre de mûres sont donc des multiples de 3 ; commencer par exemple avec 6 fraises et 9 mûres). Puis, si possible, passer au cas T=2 et C quelconque (les nombres de fruits par type sont donc des multiples de C).
- Une autre situation semble abordable (quoique difficile) : celle où C=T=3 et où il y a 3 fruits confits de chaque type. Si ce cas est résolu essayer de passer à C et T quelconques et C fruits confits de chaque type.
- Essayer de trouver d'autres situations pour lesquelles il est possible de relever le défi.

Pour un défi de ce genre il y a plusieurs types de théorèmes possibles : "le nombre minimium de coupes dans la situtation étudiée vaut exactement ..." ou "ce nombre est supérieur ou égal à ..." ou "ce nombre est inférieur ou égal à ..." ou encore "ce nombre est compris entre ... et ...".