

Tribus hiérarchiques

Sur un archipel lointain vivent des tribus, chacune avec un ordre social bien établi. Deux individus sont en **lien social** si l'un est le supérieur de l'autre. Une **hiérarchie** est un ensemble de liens sociaux tel qu'il y ait au plus un lien social entre deux personnes différentes. Pour deux individus différents A et B , on note $A \rightarrow B$ si A est le supérieur de B . On prendra garde au fait que si A est hiérarchiquement supérieur à B et B est hiérarchiquement supérieur à C alors A n'est **pas** forcément supérieur à C . Autrement dit, si on a $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$, alors on n'a pas nécessairement $A \rightarrow C$.

Sur l'île de Tournoasis vit une tribu organisée dans une hiérarchie **complète** : pour toute paire d'individus A et B , on a soit $A \rightarrow B$, soit $B \rightarrow A$.

Deux personnes mécontentes de la hiérarchie peuvent déclencher une émeute. Une **émeute** déclenchée par B contre A pour renverser $A \rightarrow B$ transforme la hiérarchie en trois étapes :

- Pour toute suite de liens sociaux $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D$ avec C différent de D , on ajoute un lien social $C \rightarrow D$ (à ce stade, on peut avoir plusieurs liens sociaux entre deux personnes),
- On renverse la hiérarchie entre A et B : $B \rightarrow A$ (d'où l'émeute),
- On simplifie la hiérarchie : s'il y a plusieurs liens sociaux entre deux personnes X et Y , alors on les remplace par le lien social majoritaire, ou bien par aucun lien social en cas d'égalité. Ainsi, $X \Rightarrow Y$ devient $X \rightarrow Y$ et $X \rightleftharpoons Y$ devient XY .

Comme la hiérarchie doit être complète sur Tournoasis, si le résultat final laisse des paires de personnes sans lien social, alors l'émeute ne peut pas avoir lieu.

La figure 1 représente trois exemples d'émeute entre A et B . La situation initiale est en haut et le résultat en bas. La configuration à gauche est cohérente, et celle à droite est complète. Sur Tournoasis, l'émeute entre C et D dans l'exemple à droite ne peut avoir lieu.

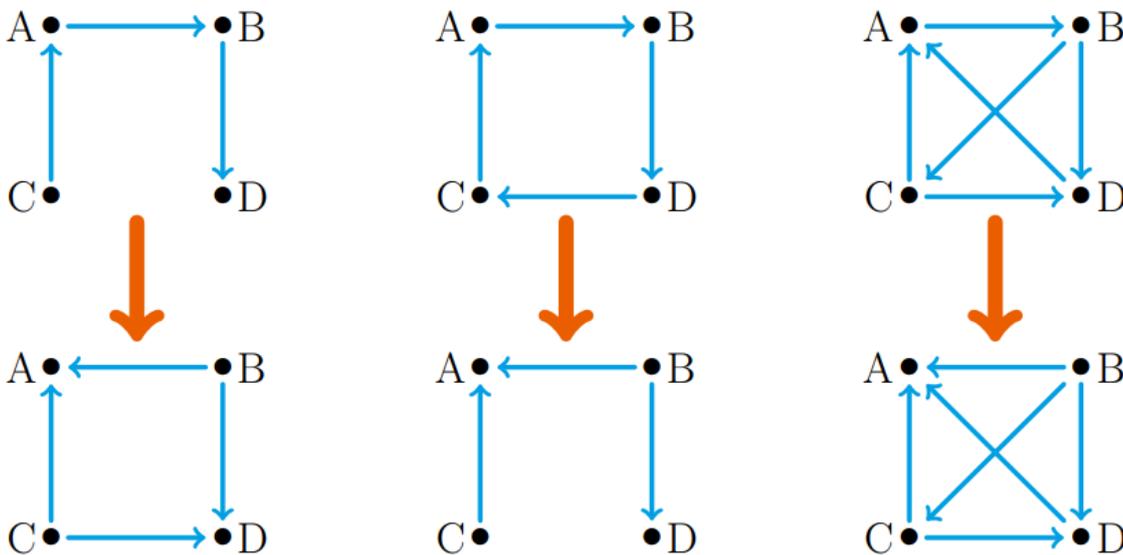


FIGURE 1 – Trois exemples d'émeutes entre A et B .

1. Existe-t-il des hiérarchies stables, dans lesquelles aucune émeute ne peut éclater ? Si oui, pour quel nombre d'individus ?

Pour deux hiérarchies H_1 et H_2 , on écrit $H_1 \rightarrow H_2$ s'il y a une suite finie d'émeutes qui transforme H_1 en H_2 .

2. Est-il vrai que si $H_1 \rightarrow H_2$, alors on a aussi $H_2 \rightarrow H_1$?

Une **révolution** est une suite d'émeutes telle que le résultat final a renversé toutes les flèches.

3. Caractériser les hiérarchies pour lesquelles une révolution est possible.
4. Pour deux hiérarchies complètes H_1 et H_2 , décider si on a toujours $H_1 \rightarrow H_2$. Si non, donner des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir $H_1 \rightarrow H_2$.

Sur l'île voisine, Courtoasis, vit une tribu similaire. Chez eux, les hiérarchies ne sont pas nécessairement complètes, mais elles doivent être **cohérentes**, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'individus A_1, A_2, \dots, A_n avec $n > 1$ et $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_1$. Si une émeute rend la hiérarchie non-cohérente, alors elle ne peut pas avoir lieu.

5. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

Sur une troisième île, Carquoisis, vit une tribu avec une hiérarchie moins stricte, pas nécessairement complète ni cohérente. Une émeute peut donc toujours avoir lieu.

6. Reprendre les questions 2, 3 et 4 dans ce cadre.
7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.