Tas de sable et périodicité

On présente ci-dessous deux problèmes où le nombre d'or [1] apparaît en filigrane. Le premier problème semble résolu et le nombre d'or joue un rôle dans la solution tandis que le second est complètement ouvert.

1 Tas de sable

Voici un jeu qui se joue à deux. Chaque joueur joue à son tour. On a deux tas de sable, chacun est constitué d'un certain nombre de grains, en général différent. Le joueur a trois choix : prendre autant de grains qu'il veut dans un tas, autant de grains qu'il veut dans l'autre, en prendre autant dans chaque tas. Celui qui enlève les derniers grains gagne.

On modélise le problème en mettant en abscisse le nombre de grains du premier tas et en ordonnée celui du second. Par exemple, $(2,3)$ signifie qu'il y a 2 grains dans le premier tas et 3 dans le second. Voici des exemples de positions perdantes : $(n,0)$, (n,n) pour tout entier n non nul. Autrement dit, si après avoir joué, il n'y a plus de grains dans un tas, l'autre joueur prend tous les grains restants et on perd ; c'est la même chose si on a laissé autant de grains dans chaque tas (cas (n,n)). Par contre, $(2,1)$ est une position gagnante car quoique l'autre joue, il se ramène à $(1,1)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,0)$ qui sont toutes des positions perdantes comme on l'a vu. Le but est de décrire toutes les positions gagnantes. On commencera par essayer de trouver d'autres positions gagnantes que $(2,1)$.

2 Une suite de nombres aux propriétés bien mystérieuses

On fixe u_0 et u_1 deux entiers quelconques et λ dans l'intervalle $]-2,2[$. On définit par récurrence une suite (u_n) de la façon suivante [2] :

u_{n+2} est l'unique entier tel que $0 \leq u_n + \lambda u_{n+1} + u_{n+2} < 1$.

Cette suite est décrite dans un article récent des mathématiciens Akiyama et Harris. Ils montrent que la suite est périodique si $\lambda = \sqrt{2}$ et si λ est le nombre d'or ! Ils conjecturent que cette suite est toujours périodique (pour tous u_0, u_1, λ).

Il semble difficile d'arriver à démontrer quelque chose, par contre il est intéressant de faire un programme qui affiche les points de coordonnées (u_n, u_{n+1}) dans le plan et de faire des expériences numériques.

1. Le nombre d'or est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C'est un nombre irrationnel connu dès l'antiquité, il apparaît dans les proportions des tableaux de la renaissance et on le rencontre partout dans la nature.

2. Il faut passer un certain temps pour vérifier que cette suite est bien définie.