Projets MathEnJeans

Par L. Paris et J. Taflin

Sujet 1 : Jeux combinatoires et stratégie gagnante

Définition. Un jeu à deux joueurs est un *jeu combinatoire* s'il vérifie les conditions suivantes :

(a) Les deux joueurs jouent à tour de rôle.

(b) Toutes les informations concernant le jeu (configurations, possibilités de mouvements des joueurs, etc.) sont connues à chaque instant des deux joueurs.

(c) Aucun hasard n'intervient dans le jeu (pas de lancer de dé, ni de distribution aléatoire de carte).

(d) Le joueur qui n'a plus aucune possibilité de mouvement perd la partie.

Exemples. Dames, échecs, etc.

But du projet. Inventer un jeu avec une stratégie gagnante pour celui qui jouera en second.

Exemple 1 : Jeu de "Fort-Boyard". Le maître de cérémonie dans l'émission Fort-Boyard propose le duel suivant. 20 allumettes sont disposées sur une table. Chaque joueur retire 1, 2 ou 3 allumettes du tas à chaque tour, et celui qui prendra la dernière allumette aura gagné. Le maître de cérémonie laisse son adversaire commencer et gagne quoi qu'il advienne en utilisant la stratégie suivante :

- Si l'adversaire prend 1 allumette, le maître en prend 3.
- Si l'adversaire prend 2 allumettes, le maître en prend 2.
- Si l'adversaire prend 3 allumettes, le maître en prend 1.

Faire un essai avec un élève.

Exemple 2 : Jeu de Nim. Le jeu de Nim se joue avec plusieurs tas composés chacun de plusieurs jetons (ou pion, ou allumettes). Chaque joueur à son tour enlève autant de pions qu'il le souhaite, mais au moins 1 et dans un seul tas à la fois. Le gagnant est celui qui retire le dernier pion.

Faire un essai avec un élève en prenant trois tas de 10, 9 *et* 3 *jetons. On laisse chercher aux élèves la stratégie gagnante de ce jeu.*

Sujet 2 : Un gâteau pour une famille qui aime les gâteaux

But du projet. Une famille composée de n membres achète un gâteau qui peut, selon l'endroit où elle l'achète, être rond, avoir la forme d'un polygone régulier, ou une autre forme. Tous les membres de la famille adorent le chocolat, et pour qu'il n'y est pas de dispute, la mère se doit de couper le gâteau en n parts exactement égales. Toute autre alternative serait sujet à dispute.

Pour ce faire, la mère dispose d'une règle, d'un compas et d'un couteau. Le but du projet est de déterminer si, pour une forme fixée (un rond, par exemple), il est possible de couper le gâteau en n parts égales, et, si oui, comment procéder.

Exemple 1. Comment fait-on pour couper un disque en deux parties égales (sans en connaître le centre) ?

Laisser réfléchir les élèves, puis donner la solution.

Exemple 2. Peut-on couper un triangle quelconque en deux parts égales ? Sinon, quels sont les triangles qui peuvent être partagés en deux parts égales, et comment ? Quels sont les triangles qui peuvent être partagés en trois parts égales ?

Ne pas donner de réponse à cette question.

Sujet 3 : Clavier et carré magique.

J'ai un téléphone dont la configuration des nombres sur le clavier est comme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{array}$$

Vous remarquerez que, si l'on somme les trois nombres sur chaque ligne, on obtient 15. De même, la somme des trois nombres sur chaque colonne est 15 et la somme des nombres sur chaque diagonale est 15. On a un *carré magique.*

Définition. un *carré magique* d'ordre n est composé de n^2 entiers strictement positifs, écrits sous la forme d'un tableau carré. Ces nombres sont disposés de sorte que leurs sommes sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale principale soient égales.

But du projet. Placer les nombres de 1 à n^2 dans un carré magique. Peut-on imaginer un procédé de fabrication générale ? Est-ce que cette construction est unique ? Par exemple, existe-t-il un carré magique 3×3 autre que celui donné ci-dessus ?

Sujet 4 : Hasard, fractal et chaos.

On prend un triangle équilatéral de sommets A, B et C et on joue au "jeux" suivant. Pour commencer on choisit un point à l'intérieur du triangle puis on jette un dés. Si on obtient 1 ou 2, on prend comme nouveau point le milieu du segment reliant notre point d'origine et A. Si on obtient 3 ou 4 on procède de la même manière mais avec B et pour 5 ou 6 on fait de même avec C. Puis on relance le dés et on suit la même procédure. Et ainsi de suite.

But du projet. Le but est d'étudier la figure qui se dessine après avoir lancé le dés un grand nombre de fois. Dépend-elle du hasard ? A quoi ressemble l'ensemble de tous les points qu'on peut obtenir après un lancé de dés ? Après 2 lancés ? 3 ? etc. Quels sont l'aire et le périmètre de cette suite de figures ? Que se passe-t-il si au lieu de prendre un triangle, on choisit un carré, un pentagone etc. ? Et si au lieu de prendre le milieu du segment, on prenait le tier le plus proche du sommet ?

Sujet 5 : Automates cellulaires.

Les automates cellulaires sont des systèmes évolutifs aux règles très simples mais dont le comportement peut être compliqué. En voici deux exemples prenant place sur un quadrillage ayant deux types de cases : blanches ou noires (un peu comme un code QR).

Jeux de la vie de Conway. Prenant un coloriage (en noir et blanc) initial du quadrillage, la couleur des cases évolue (toutes en même temps) comme suit :

- une case blanche (morte) devient noire (vivante) si 3 de ses 8 voisins sont noires. Sinon elle reste blanche,
- une case noire le reste si 2 ou 3 de ses 8 voisins sont noires. Sinon elle devient blanche.

Puis on itère le procédé.

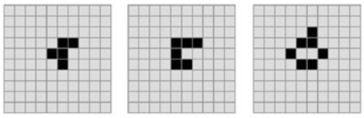

Figure 1: De gauche à droite : 3 étapes d'évolution.

La fourmis de Langton. On se donne encore un coloriage en noir et blanc pour commencer. Mais cette fois on pose une fourmis au centre d'une des case, orientée selon l'un des axes du quadrillage. Les règles d'évolution sont les suivantes :

- si la case où est la fourmis est blanche, elle tourne de 90° vers la droite puis avance d'une case,
- si la case où est la fourmis est noire, elle tourne de 90° vers la gauche puis avance d'une case,
- dans les deux cas, en quittant sa case elle en inverse la couleur.

Puis on itère le procédé.

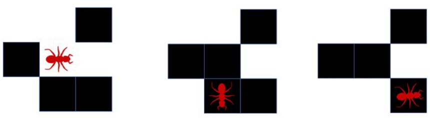

Figure 2: 3 mouvements de la fourmis.

But du projet. Dans un premier temps, manipuler ces deux exemples en partant de quadrillages avec un coloriage simple. Puis essayer de trouver des coloriages qui donnent des comportements spéciaux : peut-on avoir des coloriages qui se répète infiniment (après un certain temps, on retrouve exactement le coloriage initial) ? Peut-on en trouver où la fourmis évolue à peu près en ligne droite ? Est-il possible de construire une cage à la fourmis dont elle ne pourra s'échapper ?

On pourra aussi essayer de programmer la fourmis de Langton pour faire des simulations.

Sujet 6 : Des points et des chemins.

Sur une feuille de papier on positionne des points puis des chemins reliant ces points en respectant deux règles :

- les chemins ne se croisent ni entre eux ni avec eux-même,
- le dessin obtenu est d'un seul tenant.

Ce dessin délimite un certain nombre de régions.

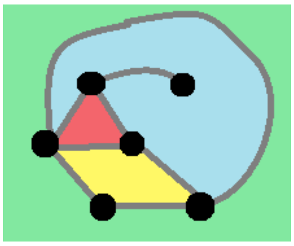

Figure 3: Un exemple de dessin qui délimite 4 régions.

On note R le nombres de régions, C celui de chemins et P celui de points. Semble-t-il y avoir un lieu entre R, C et P ? Si oui, peut-on en donner une démonstration ?

Cette question est reliée avec le problème pratique suivant : dans un circuit imprimé en électronique, la juxtaposition des connexions est coûteuses et il vaut mieux les éviter. Si on prend 6 composantes, disons 3 processeurs ($P1$, $P2$ et $P3$) et 3 mémoires ($M1$, $M2$ et $M3$) est-il possible de relier chacun des processeurs aux 3 mémoires sans faire de juxtaposition de connexions ?

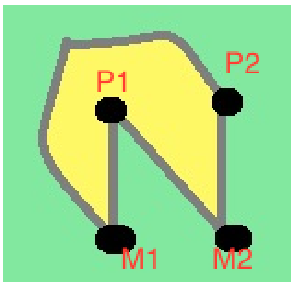

Figure 4: Le problème est facile s'il n'y a que 2 processeurs et 2 mémoires.