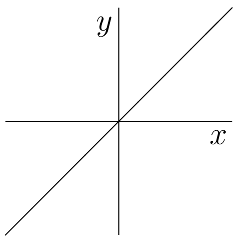
3 septembre 2012

Sujet-MATh.en.JEANS

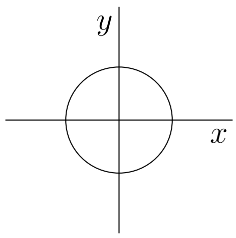
Géométrie tropicale

1 Équations et géométrie classique

Commençons par un exemple : prenons l'équation $x - y = 0$. Résoudre cette équation signifie trouver tous les couples (x, y) pour lesquels effectivement $x - y = 0$. Par exemple, $(1, 1)$ est une solution car $1 - 1 = 0$. Il y a une infinité de solutions. Pour s'en convaincre, on peut représenter toutes les solutions sur un diagramme : à chaque fois que l'on a une solution (x, y), on place un point M sur un repère, d'abscisse x, et d'ordonnée y. Si on effectue ce procédé pour toutes les solutions, on obtient une droite !



De même, si on représente toutes les solutions de l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on obtient un cercle ! En fait, beaucoup de courbes correspondent ainsi aux solutions de certaines équations.



Il existe d'autres façons d'associer une courbe géométrique à une équation. L'une de ces façons a donné naissance à la géométrie tropicale. Pour l'expliquer, je vais introduire de nouvelles opérations.

2 Opérations tropicales

- L'addition tropicale

  La somme tropicale de deux nombres est leur minimum. On note cette addition $\oplus$. Par exemple, $5 \oplus 2 = 2$, car le plus petit nombre entre 5 et 2 est 2.
  $$a \oplus b = \min(a, b).$$
- La multiplication tropicale
  Le produit tropical de deux nombres est leur somme classique. On note cette multiplication $\otimes$. Par exemple, $5 \otimes 2 = 7$ car $5 + 2 = 7$.
  $$a \otimes b = a + b$$

Attention : on ne peut pas définir de soustraction tropicale ! (Pourquoi ?)

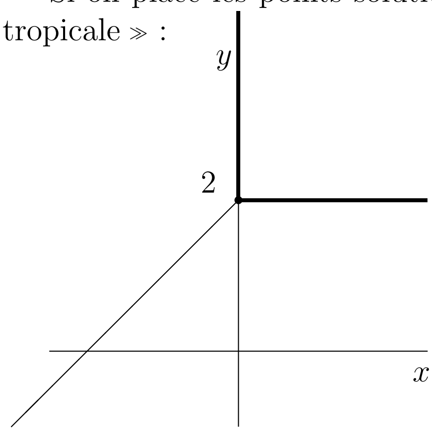
3 Droites tropicales

Pour définir une droite tropicale, on part d'une expression du genre $x - y + 1$, puis on la « tropicalise », c'est-à-dire que l'on remplace dans l'expression les opérations classiques par leurs analogues tropicaux. Comme $x = 1 \times x$, et $-y = (-1) \times y$, on remplace $x - y + 1 = 1 \times x + (-1) \times y + 1$ par $1 \otimes x \oplus (-1) \otimes y \oplus 1$. Or
$$1 \otimes x \oplus (-1) \otimes y \oplus 1 = \min(1 + x, -1 + y, 1).$$

Une fois que l'on a l'expression tropicale, on place tous les points $M(x, y)$ en lesquels le minimum est atteint au moins deux fois, c'est-à-dire, pour notre exemple :

$$\begin{cases} 1 + x = -1 + y \\ 1 + x \leq 1 \end{cases}$$
$$\text{ou} \quad \begin{cases} 1 + x = 1 \\ 1 \leq -1 + y \end{cases}$$
$$\text{ou} \quad \begin{cases} -1 + y = 1 \\ 1 \leq 1 + x \end{cases}$$

Si on place les points solutions du problèmes ci-dessus, on obtient la « droite tropicale » :



4 Problèmes

1. Calculer avec des opérations tropicales.
2. Quelles sont les différences avec les opérations classiques ?
3. Tracer des droites tropicales. A quoi ressemblent-elles ?
4. Quelles sont les différences avec les droites classiques ? (Par exemple, en géométrie classique, par deux points passe toujours une droite et uen seule. Est-ce encore vrai dans le monde tropical ?)
5. Quel est l'analogue tropical du cercle ?