Sujet I. Un drôle d'ascenseur

Un immeuble, qui comporte une infinité d'étages, possède un ascenseur un peu particulier. Si on est à un certain étage, on n'a pas le choix de l'étage auquel il va nous emmener ! Deux cas se présentent : Si l'étage de départ est pair (par exemple, 14), l'ascenseur nous fait descendre de la moitié des étages (dans notre exemple, il nous emmène au 7e). Sinon, il nous fait monter d'un étage.

Question de début de projet :

1. Un passager monte dans l'ascenseur, et décide d'y rester. Finira-t-il toujours par arriver au premier étage, quel que soit son étage de départ ?

Pour la suite, toute question suggérée par ce qui précède peut être explorée. Par exemple :

2. Que se passe-t-il si on modifie le fonctionnement de l'ascenseur ? (ex : dans le cas impair : monter de deux, trois, etc... étages au lieu de un ; doubler le nombre d'étages, puis monter de un, deux, etc.. étages supplémentaires.)

3. Si l'ascenseur finit toujours par arriver au même endroit, combien de fois faut-il appuyer pour cela ?

4. Etc...

Sujet II. La calculatrice à la touche rouge

Une machine à calculer possède une touche (rouge) un peu spéciale : Lorsqu'on écrit un nombre entier, et qu'on appuie sur la touche rouge, elle calcule la somme des chiffres qui ont été tapés pour écrire le nombre en question. Par exemple, lorsqu'on rentre 5132, elle calcule 5+1+3+2=11.

1. Que se passe-t-il si, après avoir entré un (grand) nombre, on appuie un grand nombre de fois sur la touche rouge ?

Pour la suite, comme pour le problème de l'ascenseur, toute question suggérée par ce qui précède peut être explorée. Par exemple :

2. Dans les cas où la suite stabilise sur une valeur finale, comment se répartissent ces valeurs en fonction du nombre de départ ?

3. Que se passe-t-il si le fonctionnement de la touche rouge est modifié ? (ex : la calculatrice calcule le produit des chiffres à la place de la somme ; la somme des carrés des chiffres ; le produit des carrés des chiffres ; etc...)

4. Etc...

Sujet III. Enigme des prisonniers, et des chapeaux blancs et noirs. (avantage : la solution de ce problème conduit à un joli tour de magie.)

Un roi malfaisant souhaite s'amuser aux dépends des prisonniers de son royaume. Il les réunit et leur soumet l'épreuve suivante : "Demain, vous serez alignés les uns derrière les autres, sans aucun droit de communiquer entre vous. Chacun recevra sur la tête un chapeau, blanc ou noir, de sorte que chaque prisonnier ne verra que la couleur des chapeaux de ceux qui le précèdent dans la file. Ainsi, le dernier de la file verra la couleur de tous des chapeaux (sauf le sien), et le premier n'en verra aucune. En partant du bout de la file, chacun aura le droit d'annoncer une couleur. Ceux qui annonceront la couleur de leur chapeau seront libérés. Les autres resteront en prison jusqu'à la fin des temps. En attendant, je vous offre un banquet au cours duquel vous pouvez converser librement." Comment les prisonniers peuvent-ils s'arranger de manière à ce que le plus grand nombre d'entre eux soit libéré ?

Sujet IV. Les Daltons sont partout !

Dix personnes de tailles différentes se tiennent debout, les unes à côte des autres, dans un ordre aléatoire. Si on sélectionne au hasard quatre de ces personnes, elles ne seront en général pas rangées en Daltons (par ordre croissant ou décroissant de taille). Est-il toutefois toujours possible d'en sélectionner quatre (pas nécessairement l'une à côte de l'autre) de manière à ce que ce soit le cas ?

Indice : Avant de s'attaquer à ce problème, on pourra commencer à chercher à le simplifier. Par exemple, si on commence avec moins de dix personnes, combien de Daltons peut-on trouver ?