

HS7**Yoga Binomial (1ères-Termiales)****PRÉSENTATION**

On s'intéresse dans ce sujet à des questions de *combinatoire*, c'est à dire d'étude de combinaisons dans un but de dénombrement.

Par exemple, il est facile d'établir que $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ correspond au nombre de façons de permuter n éléments entre eux. On procède par récurrence en utilisant le fait que pour permuter $n + 1$ éléments, il suffit de choisir où positionner un de ces éléments et de multiplier le nombre de choix par le nombre de permutations des n éléments restants.

C'est ce type d'argument que l'on cherche à utiliser, davantage que du calcul purement algébrique, pour établir des formules faisant intervenir des *coefficients binomiaux* $\binom{n}{k}$, où l'on rappelle que $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble qui en contient n .

QUESTIONS

1. On pourra notamment calculer les sommes

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}, \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad 0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n}.$$

2. On prouvera aussi que

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}, \quad \binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k}, \quad \binom{n+1}{2k+1} = \sum_{j=k}^{n-k} \binom{j}{k} \binom{n-j}{k}.$$

3. On essaiera de calculer la somme

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2.$$