Sujet-MATh.en.JEANS de Septembre 2013.

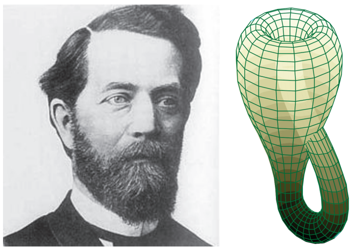
Sujet donné par Olivier BIREMBAUX
au Lycée Stendhal de Milan.

En hommage à Franki DILLEN (1963-2013).

Géométrie Différentielle Affine

1 Introduction.

La géométrie différentielle affine, est un type de géométrie dans lequel nous nous intéressons à des éléments invariants par changement de repères. Le nom de géométrie différentielle affine découle du programme d'Erlangen réalisé en 1872 par le mathématicien Félix Klein (1849-1925) à qui l'on doit la bouteille du même nom.



Félix Klein et sa fameuse bouteille.

Cette géométrie a été fortement développée par Wihlem Blaschke (1885-1962) entre 1916 et 1923 en collaboration avec d'autres mathématiciens comme Pick, Radon, Berwald et Thomsen pour les plus connus.

Wihlem Blaschke.

Les mathématiciens Katsumi NOMIZU et Takeshi SASAKI ont fait un ouvrage de référence sur le sujet : voir le livre **"Affine Differential Geometry"**, Cambridge university Press, 2004. De nombreux mathématiciens ont travaillé et travaillent encore sur le sujet de nos jours. On peut citer : Amari, An-Mi Li, Bureau , Bang Yen Chen, Dillen , Nomizu, Sasaki, Simon, Verstraelen, Vrancken et Yau........

2 La codimension 1 et le normal affine.

La partie où nous avons le plus d'avancées est l'étude des espaces M de dimension n dans des espaces de dimension $n+1$. Dans ce cas, on peut "repérer" l'espace à étudier, M, via un vecteur transverse.

A titre d'exemple, le plan d'équation $x+y+2z=3$ dans l'espace admet pour vecteur normal le vecteur $(1,1,2)$ mais nous aurions pu prendre le vecteur opposé ou un autre vecteur transverse.

Dans la géométrie différentielle affine, il existe "un" vecteur supplémentaire particulier qu'on appelle le normal affine ou le normal de Blaschke noté ξ. En fait on peut prendre ξ ou $-\xi$.

On définit une forme volume Ω induite par celle de l'espace de dimension $n+1$: $\Omega(X_1,\dots X_n)$ est le volume engendré par $X_1,\dots,X_n,\xi$ où $X_1,\dots,X_n$ sont des champs de vecteurs tangents à M. On a également une autre forme volume ω donnée par la métrique de M.

Le normal affine ξ est défini par les deux propriétés suivantes.

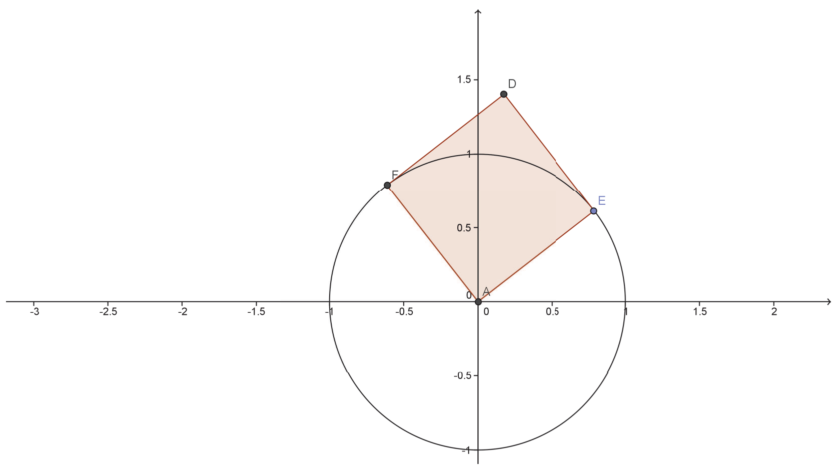
1. Le déplacement parallèle préserve le volume. Détaillons un peu cette notion. On note $\alpha_t, 0 \le t \le 1$ une courbe sur M, $X_1,\dots,X_n$ des vecteurs tangents à M en le point α_0. On note $X_{1\,t},\dots,X_{n\,t}$ les champs de vecteurs obtenus à partir de $X_1,\dots,X_n$ par déplacement parallèle le long de la courbe α_t.

   Alors le volume engendré par $X_{1\,t},\dots,X_{n\,t},\xi_t$ est constant.
2. $\omega=\Omega$.

3 Le cas des courbes dans le plan.

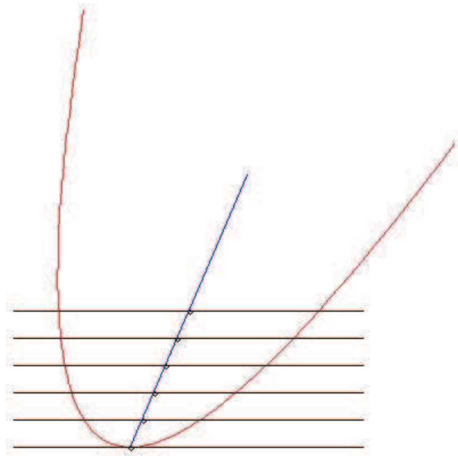
Commençons par un exemple. La droite d'équation $y=2x+1$ peut être repérée par le point $A(0,1)$ et le vecteur directeur $(1,2)$. Les points de cette droite sont donc donnés par $(x(t),y(t))=(0+t,1+2t)$ où t varie. Les (x_t,y_t) sont appelées coordonnées paramétriques de cette droite dans le plan.

Plus généralement, on peut définir des coordonnées paramétriques d'une courbe $\alpha(t)$ dans le plan : $\alpha(t)=(x(t),y(t))$. Un vecteur tangent $\overrightarrow{v_1}_t$ au point $(x(t),y(t))$ est donné par la dérivée $\alpha'(t)$: $\overrightarrow{v_1}_t=(x(t),y(t))$. Le normal affine est dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{v_2}_t$ tel que le parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}_t$ et $\overrightarrow{v_2}_t$ aient une aire constante égale à 1. Voyons l'exemple du cercle de rayon 1.



Le point $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ est représenté par E. Il varie sur le cercle. Le vecteur $\overrightarrow{v_1}_t$ est $\overrightarrow{ED}$. Si on prend $\overrightarrow{v_2}_t = \overrightarrow{EA}$ alors le parallélogramme est toujours un carré de côté 1. On en déduit que son aire est constante et égale à 1. Donc dans ce cas le normal affine est le vecteur normal au cercle de longueur 1.

Il y a un moyen simple de visualiser la direction du normal affine d'une courbe.



Considérons la tangente en un point. On trace des droites parallèles à celle-ci et proches. Ces droites parallèles suffisamment proches de la tangente coupent la courbe en exactement deux points. Sur chaque segment formé de ces 2 points, nous marquons le milieu. La direction du normal affine est donné par ces milieux.

4 Problèmes.

1. Déterminer le normal affine pour une ellipse.
2. Déterminer le normal affine pour une parabole.
3. Déterminer le normal affine pour une hyperbole.
   On pourra utiliser le logiciel geogebra pour le visualiser.
4. Tracer le normal affine pour d'autres courbes.