

# Le bestiaire de Marie-José et la bataille des hydres

MATH.en.JEANS

Octobre 2016

Une hydre est une bête mythique très rare. On ne connaît pas grand chose sur ces être vivants.

On sait que, quand elle naissent, elles apparaissent avec juste une seule tête, ancrée dans le sol.



FIGURE 1 – Naissance d'une hydre

Ensuite elles grandissent de deux manières différentes :

- soit, un noeud se forme au bas de la tête, puis un cou se met à grandir entre la tête et le noeud ;
- soit, un nouvelle tête apparaît sur un noeud existant et un cou se met à grandir entre la nouvelle tête et le noeud.

La figure 2 montre toutes les façons de deux hydres particulières de grandir.

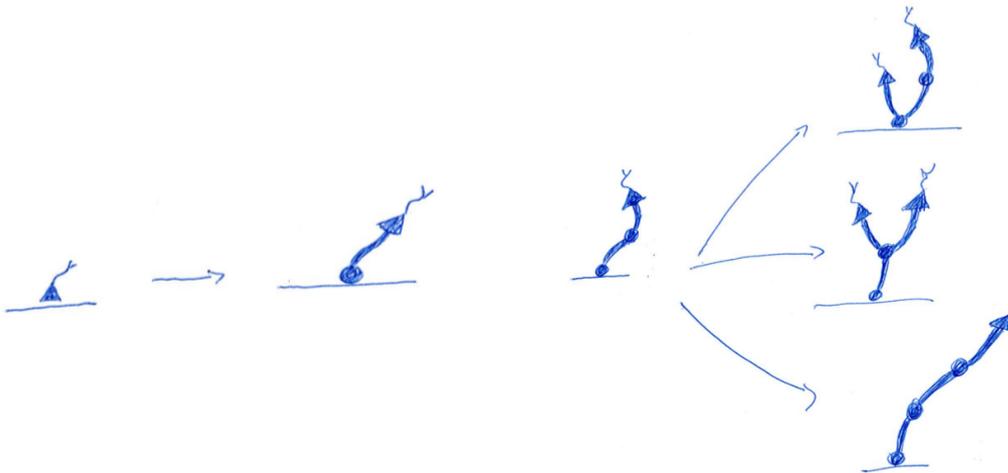


FIGURE 2 – Le développement de deux hydres

## 1 Le bestiaire de Marie-José

Depuis juin dernier, Marie-José c'est mise à collectionner des hydres. Comme elle souhaite les exposer sur les murs de sa maison, elle a décidé de les faire grandir dans un cadre pour obtenir de jolis tableaux.

Ainsi, pour une même hydre donnée, il existe plusieurs tableaux différents possibles. Par exemple, dans la figure 3, l'hydre de gauche à deux tableaux différents.

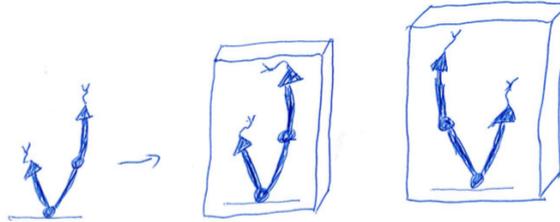


FIGURE 3 – Deux tableaux d'hydre

Mari-José possède déjà plein d'hydres différentes. Pour les classer, elle a décidé de mesurer le développement de ses hydres par leurs tailles en comptant à la fois les têtes et les noeuds. Ainsi, la taille d'une hydre est son nombre de têtes plus son nombre de noeuds.

Par exemple, l'hydre de la figure 4 est de taille 5, car il y a 3 têtes et 2 noeuds.

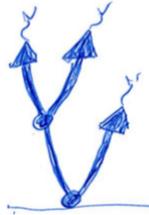


FIGURE 4 – Une hydre de taille 5

Marie-José, qui aime bien faire aussi des mathématiques, souhaite savoir s'il existe un formule qui dépends de  $n$  et qui permet de donner le nombre de tableaux différents contenant une hydre de taille  $n$ .

Par exemple, il y a un seul tableau contenant une hydre de taille 1 et un seul tableau contenant un hydre de taille 2. Par contre, il y a deux tableaux possibles qui contiennent une hydre de taille 2.

Hercule, suite à une mauvaise expérience personnelle, préfère les hydres qui ont une hauteur maximale fixée à 2 (la hauteur d'un cou est de 1). Existe-t-il une formule qui permette de déterminer le nombre de tableaux contenant une hydre de taille  $n$  et de hauteur 2? Même question pour des hydres de taille  $n$  et de hauteur  $k$ .

## 2 La bataille des hydres

Les hydres, inoffensives quand elles sont élevées avec amour et gentillesse, deviennent de redoutables bêtes féroces quand on les attaque.

Déjà, ce sont des animaux quasiment invulnérable. Seules les têtes peuvent être coupées. Ensuite un noeud qui se retrouve sans tige au dessus de lui se transforme en tête. Enfin

quand on coupe une tête, le noeud qui a perdu la tête envoie un message de réplication qui se propage du noeud au pied de l'hydre, de haut en bas uniquement, sans jamais remonter et sans jamais bifurquer. A chaque fois que le message traverse un cou, le cou se duplique un nombre arbitraire de fois. C'est à dire que le cou ainsi que toute les parties de l'hydre accrochées au noeud supérieur du cou se duplique en un nombre d'exemplaires quelconques ! Enfin, l'hydre attaque son agresseur jusqu'à la fin de sa vie, obligeant son agresseur à se défendre et à répliquer.

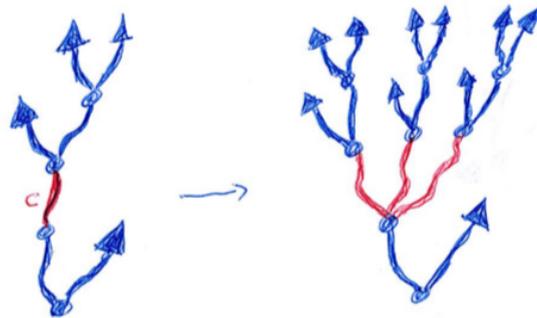


FIGURE 5 – Un cou se réplique

Voici un exemple de combat ou une hydre s'est répliquée après avoir perdu une de ses têtes :

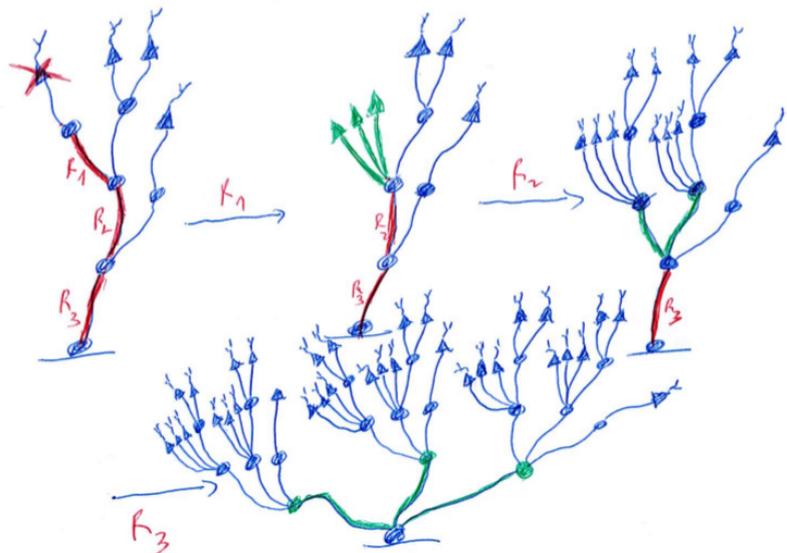


FIGURE 6 – Un combat avec une hydre

Suite à un histoire stupide et grotesque, Hercule a commencé une bataille avec une hydre. Pouvez-vous l'aider ? Existe-t-il une stratégie qui permet de vaincre l'hydre ? Que faut-il ne surtout pas faire pour ne pas perdre contre l'hydre ?