Sujets Maths en Jeans 2016-2017

Proposés par Vincent Guirardel

September 12, 2016.
Fichier `2016-2017_01.tex`

1 Echelle pour mélanger ou ranger les cartes

On se donne un paquet de 52 cartes, mélangées, et on veut les ranger avec une échelle à 52 montants.

A quoi ressemble une echelle: on a 52 montants, les barreaux sont tous a des hauteurs differences.

Une échelle mélange les cartes: les cartes partent du haut. Quand une carte tombe sur un barreau, elle suit le barreau et change de montant.

Question 1.1. *Si on met une carte sur chaque montant en haut, est-ce que 2 cartes peuvent se retrouver au meme endroit en bas ?*

Question 1.2. *Est-ce que les echelles peuvent tout ranger ? Si quelqu'un met une cartes sur chaque montant en haut, est-ce que vous pouvez mettre des barreaux pour qu'en bas, elles arrivent rangées.*

Ranger un paquet de 52 cartes, c'est mettre les cartes dans l'ordre croissant et par couleur: (1,2,3..,10,VDR à trefle puis à carreau, puis coeur puis pique. On pourrait choisir une autre convention, mais il faut s'y tenir.

Question 1.3. *Si vous avez 10 barreaux, pouvez-vous toujours ranger les cartes ? Et si vous avez 100, 1000 barreaux ? 1000,000 de barreaux ?*

Comment acheter le moins de barreaux possibles pour pouvoir ranger les cartes en toutes circonstances ?

2 Coder une droite

On considére le plan quadrillé par des droites horizontales et verticales, à distance 1 les une des autres. On fixe un carré Q dans ce quadrillage.

On considère une droite d qui rencontre Q. Supposons que d n'est ni horizontale ni verticale. Chaque fois que d rencontre une droite du quadrillage en un point M, on écrit sur le point M la lettre H, V ou C selon que l'intersection se fait avec un droite horizontale, verticale, ou les deux (un coin).

En commencant à partir du carré Q et en allant vers la droite, on lit un mot infini.

Exemple: droite a 45 degres, HVHVHVHVHVHVHVHVHVHVHVH

Question 2.1. *Est-ce que toutes les droites donnent un mot périodique ?*

Question 2.2. *Est-ce que 2 droites différentes peuvent donner le même mot infini ?*

Est-ce que 2 droites de pentes différentes peuvent donner le même mot infini ?

Note: tous les mots infinis peuvent pas apparaitre. Par exemple on peut pas voir HHHHVVVV comme sous-mot.

Question 2.3. *Quels sont les mots infinis qui peuvent apparaitre ?*

Quels sont les mots finis qui peuvent apparaitre comme sous-mot ? Par exemple HVHV apparait comme sous-mot, mais pas HHHHVVVV.

Est-ce que certains sous-mots determinent completement le mot infini ?

Question 2.4. *Parmi les mots de 10 lettres écrits avec les 3 lettre H, V, C, combien peuvent apparaitre comme sous-mot d'un tel mot infini ? Est-ce une grosse proportion ?*

Meme question avec les mots de N lettres, pour d'autres valeurs de N, pour N tres grand...

Si on ne peut pas determiner ce nombre exactement, peut on minorer ou majorer ce nombre ? Dire qu'il y en a au moins 1000, ou au plus 10^{10} par exemple...

3 Auto-pavages

Definition 3.1. *On dit qu'une forme C est autopavable si, on peut paver C avec un certain nombre de copies de C à une échelle plus petite, toutes de même taille (les pavés sont tous isométriques à un même homothétique de C).*

Exemple: On peut paver un carré par 4 carrés de taille moitié. Un carré est donc autopavable. Ici, le rapport d'échelle est $1/2$.

On peut aussi un pavé un carré par n^2 carrés de taille $1/n$. Ici, le rapport d'échelle est $1/n$.

Question 3.2. *Quelles sont les formes autopavables ? Y-en a-t-il d'autres que le carré ?*

Y a-t-il des formes qui sont auto-pavables de rapport n pour tous les entiers n, autres que le carré ?

Y a-t-il des formes qui sont auto-pavables pour une infinité de nombres autres que le carré ?

Definition 3.3. *Un nombre $\lambda < 1$ est un rapport d'autopavage s'il existe une forme C autopavable, de rapport λ.*

Exemple: A4 et A5.

Question 3.4. *On a vu que les nombres entiers et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sont des nombres d'autopavages. Y en a t il d'autres ?*

Est-ce que tous les nombres réels peuvent etre des nombres d'autopavage ?

Est-ce que $\frac{1}{2{,}5}$ peut etre un nombre d'autopavage ?

4 Construire une Gamme

Renouvelons la musique: inventons de nouvelles gammes.

Rappel: chaque note est caractérisée par un nombre réel positif: sa fréquence. Plus elle est élevée plus la note est aigüe.

L'*écart de hauteur* entre les notes correspond au *rapport* des fréquences. Par exemple: deux notes sont séparées par un *octave* si la fréquence de l'une est le double de l'autre: $f_2 = 2f_1$ Elle sont séparées par 3 octaves si $f_2 = 2 * 2 * 2f_2 = 8f_1$.

La gamme tempérée utilisée depuis Bach (?) divise l'octave en 12 intervalles égaux (les demi-tons): LA, LA#, SI, DO, DO#, RE, RE#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA. C'est a dire que chacune des 12 notes de la gamme est séparée de la suivante du même intervalle, la dernière note étant une répétition de la première un octave plus haut.

Je vous propose d'essayer de construire d'autres gammes tempérées.

Contraintes imposées:

Axiome de l'octave La note finale de la gamme doit être à l'octave de la note initiale (on autorise un nombre entier d'octaves: 1,2,3 voire plus)

Axiome de symétrie Comme la gamme tempérée: l'écart entre 2 notes consécutives doit être exactement le même. Ainsi, si vous commencez la gamme par n'importe laquelle des notes, vous entendez la même chose, juste décalé vers l'aigu ou vers le grave.

Pour choisir entre ces gammes, vous voudriez pouvoir jouer votre intervalle préféré exactement, ou sinon le plus près possible.

Par exemple, l'intervalle préféré de Pythagore était 3/2 (la quinte pythagoricienne): comme c'est une fraction formée de petits entiers, deux sons vibrant à des fréquences f_1 et $f_2 = \frac{3}{2}f_1$ sonnent de manière harmonieuse aux oreilles de Pythagore. Dans la gamme tempérée, l'écart entre Do et SOL est proche de $\frac{3}{2}$, mais pas exactement.

Question 4.1. *Parmi les gammes à moins de 12 notes, quelle est la gamme qui a un intervalle le plus proche de* 3/2 *?*

Proposer une gamme ayant le moins de notes possibles, et qui a un intervalle plus proche de 3/2 *que la gamme tempérée.*

Existe-t-il une gamme ayant un intervalle exactement égal à 3/2 *?*

On peut aussi se poser le meme genre de question si votre intervalle préféré est la tierce harmonique 5/4, ou bien 4/3 (quarte), ou autre chose.

Pour se chauffer: quels sont les rapports de fréquences pour la gamme tempérée habituelle ?

Pour aller plus loin: écrire de la musique avec la gamme que vous aurez inventée !

Autre piste (plus physique/expérimental que math... nécessite du matériel ? voir avec les profs de musique ?): Avec un ordi (ou un synthé ?), créer un 1er son qui serait la superposition de 2 notes (sinusoidales) dont les fréquences sont de rapport 3/2. faire la même chose avec l'intervalle DO-SOL de la gamme tempérée, et écouter la différence. Quelle différence entendez vous ? Tracer fonctions correspondant aux sons.

Faire la meme chose avec des instruments, ou des courbes périodiques non sinusoidales (assembler des morceaux de droites ou de paraboles par exemple...)

Recommencer des sons qui ne sont pas sinusoidaux, mais superposition de plusieurs harmoniques, c'est à dire somme de plusieurs sinusoides (4 par exemple) de fréquences $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1$ (en général de moins en moins fortes).

Expliquer théoriquement la présence ou non de "battements". (Difficile sans guide probablement ? L'exhiber sur la superposition de 2 sinusoides de fréquences très proches: graphe des fonctions, formules d'addition des cosinus...)