

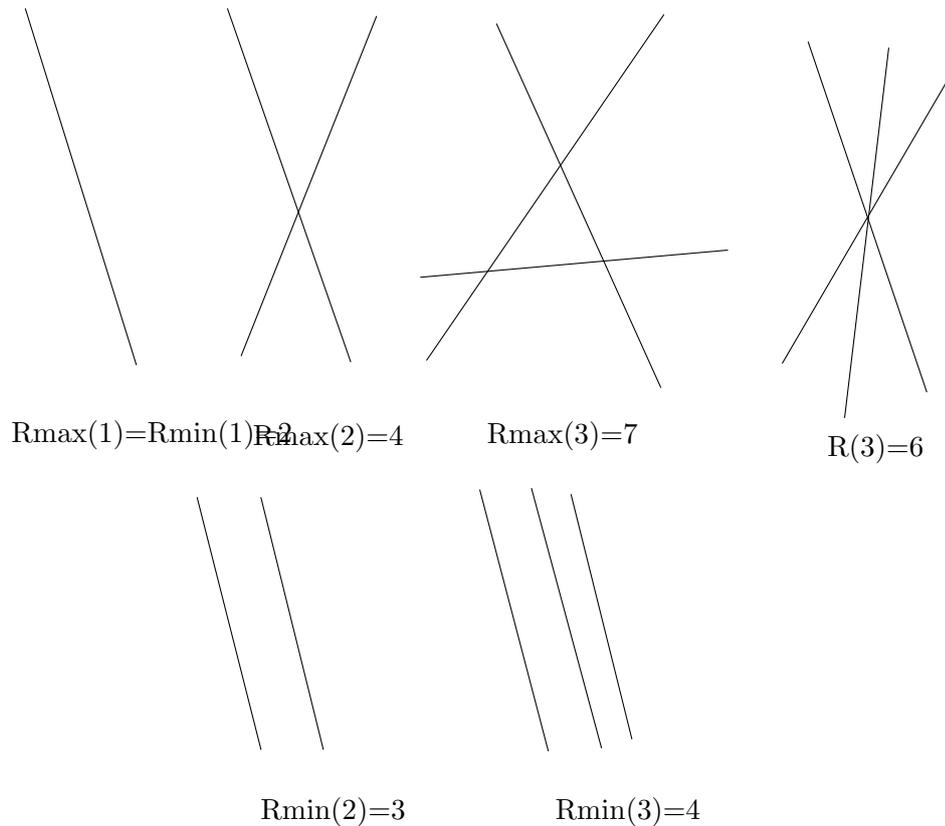
## DEUX SUJETS POUR MARCIAC 2021

**Sujet 1 : En combien de régions  $n$  droites partagent-elles le plan?**

On se donne un nombre fini  $n$  de droites dans le plan. On cherche à déterminer le nombre de régions du plan délimitées par ces  $n$  droites et en particulier le nombre minimal  $r(n)$  et le nombre maximal  $R(n)$  de régions possibles. Enfin on voudrait savoir si toutes les valeurs entre  $r(n)$  et  $R(n)$  sont atteintes ou si certaines (mais alors lesquelles?) sont absentes.

Méthode suggérée : on peut travailler avec  $n = 3, 4, 5...$  Étudier le cas des droites parallèles, puis toutes concourantes, puis le cas générique (que des points doubles). Pour chacun de ces cas on pourra donner une formule (en fonction de  $n$ ).

Plus généralement, introduire un point multiple ( $m$  droites par un point) puis plusieurs et chercher une formule prenant en compte l'existence des points multiples et leur ordre de multiplicité.

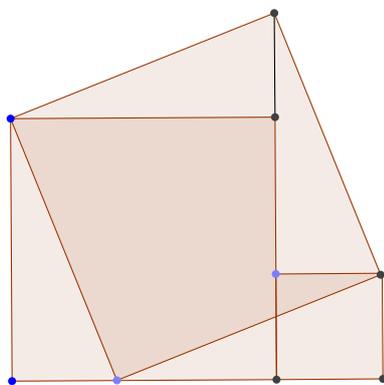


### Sujet 2 : Puzzles polygonaux

Étant donnés deux polygones de même aire, on voudrait montrer qu'il est possible de découper (en plus petits polygones) de manière à pouvoir reconstituer exactement l'autre.

Suggestion de méthode : on va montrer que tout polygone peut se décomposer en morceaux pouvant reconstituer un carré. Alors si deux polygones de même aire peuvent être découpés pour former un carré ce sera le même car il n'y a qu'un carré d'une aire donnée.

Par ailleurs, tout polygone peut être découpé en triangles (à vérifier!). Il faudra alors montrer qu'un triangle peut être découpé pour construire un carré. Pour plusieurs triangles on utilise Pythagore : deux carrés peuvent être découpés pour en former un troisième, comme vous pouvez le voir sur la figure ci-dessous :



Il restera donc à découper un triangle pour former un carré. On commencera par transformer un triangle en rectangle (prenez comme longueur du rectangle la base du triangle). Puis on passera du rectangle au carré.

### Sujet 3 : Inversion circulaire et problème de Napoléon

Étant donné un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  on considère l'application qui à tout point  $M$  différent de  $O$  du plan associe le point  $N$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $N$  est sur la demi droite  $[O, M)$ ,
- (2)  $OM \cdot ON = R^2$ .

On veut dans un premier temps étudier les propriétés de cette application. Quelle l'image d'une droite qui passe par  $O$ , celle d'une droite qui ne passe pas par  $O$  mais qui coupe le cercle en deux points, quelle est l'image d'un cercle passant par  $O$ , quelle est l'image du cercle  $\mathcal{C}$ , l'image d'un cercle ne passant pas par  $O$ ...

Dans un second temps, on voudrait, en utilisant cette application, trouver le centre d'un cercle quelconque en utilisant seulement un compas!