Niveau : Lycée
Thèmes abordés : combinatoire.

On peut représenter le résultat d'un tournoi entre $n$équipes par des flèches entre les équipes : une flèche est orientée de l'équipe A vers l'équipe B lorsque A a gagné B. On suppose qu'il n'y a pas de match nul, c'est-à-dire que dans tout match il y a exactement un gagnant et un perdant et que deux équipes ne se rencontrent qu'une fois.
On dira que deux équipes sont « jumelles » si elles ont fait exactement les mêmes résultats dans leurs matches avec les autres équipes. On cherche à décrire et caractériser les tournois qui vérifient les deux propriétés suivantes :
- il n'existe pas deux équipes « jumelles »
- une fois le tournoi terminé, si une équipe quelconque est éliminée (par exemple disqualifiée) alors deux équipes qui deviennent « jumelles ».

A) Bien comprendre l'énoncé à partir d'exemples simples.

Lorsqu'on supprime un nœud quelconque du graphe alors il existe deux équipes qui ont fait exactement les mêmes résultats.

1) Existe-t-il de tels résultats de tournois à 2, 3, 4, 5 sommets ? Si oui les donner.

2) Traduire en termes de successeurs et de prédécesseurs l'hypothèse pour deux équipes d'avoir le même résultat dans leurs matches avec les autres équipes sauf avec une autre. On dit que cette troisième équipe « départage » les deux équipes.

3) Pourquoi une équipe ne peut pas départager deux paires différentes d'équipes ?

On s'amuse alors à construire un nouveau graphe associé au tournoi Tqu'on noteG_T. Les nœuds de $G_T$sont les équipes et il existe une arête entre deux équipes i_u et j_u si l'équipe u les départage.

4) Montrer que le graphe G_T contient au moins un cycle. Pour cela on admettra que G_T est connexe et on remarquera que si un graphe connexe ne contient pas de cycle alors son nombre de nœuds est égal à son nombre d'arêtes.

5) Montrer que les nœuds de G_T sont exactement de degré 2. On commencera par montrer qu'ils sont au plus de degré 2.

6) Montrer que $G_T$est un cycle de longueur impaire.

Si c'est trop difficile on peut admettre l'équivalence

$$u=v \Leftrightarrow \{i_u, j_u\}=\{i_v, j_v\}$$

et montrer

a) Quel que soit u sommet de G_T, toute arête uv de G est associée à l'un des sommets i_u ouj_u.

b) G_T ne contient pas de sommet de degré supérieur ou égal à 3.

c) Les composantes connexes de G_T sont des cycles sans corde.

d) Les 3 sommets u, i_u, j_u sont dans une même composante connexe.

e) Les cycles de G_T sont de longueur impaire.

Références :

- Culus JF, Jouve B (2009) Convex circuit free coloration of an oriented graph. European Journal of Combinatorics 30(1): 43-52.