Sujet 2 : Un réseau social un peu particulier
Niveau : Lycée ou collège
Thèmes abordés : combinatoire.

Je viens de m'inscrire dans un nouveau réseau social qui est constitué de telle sorte que deux personnes ont exactement un ami en commun. Quels sont, dans ce réseau, les amis de mes amis ? Deux de mes amis qui ne sont pas amis peuvent-ils être amis de quelqu'un qui n'est pas mon ami ? Quelle particularité a le réseau de mes amis ? …

Ce théorème (théorème de l'amitié) a été démontré pour la première fois par Erdös, Rényi et Sós en 1966. Il peut s'énoncer simplement de la manière suivante : « Si, dans un ensemble fini de personnes rassemblées dans une fête, toute paire de personnes possède exactement un ami en commun, alors il existeune personne (appelée hôte de la fête) qui est amieavec toutes les autres ». Mais on ne donnera peut-être pas de suite la solution !!

1) Comme dans l'exemple précédent il faut d'abord modéliser la situation. Ici les sommets du graphe sont les individus du réseau social et il y a une arête entre deux sommets si les deux personnes sont amies. On suppose qu'une personne n'est pas amie avec elle-même. On suppose aussi que la relation est symétrique : si je suis ami avec toi alors tu es ami avec moi. On suppose qu'un graphe qui vérifie la propriété énoncée s'appelle un « graphe d'amitié ».
2) Donner des exemples de tels graphes. Bien comprendre le « exactement un ami en commun ». Traiter les exemples de réseaux à 3, 5 et 7 personnes. Pourquoi n'est ce pas possible à 2, 4 et 6 personnes ?
3) *Lemme : un graphe d'amitié ne peut pas contenir de cycle de longueur 4.*

Cela se montre sans problème par contradiction.

4) *Lemme : les amis de mes amis sont mes amis (ie. la distance entre deux sommets est au plus 2)*

Idem sans problème par contradiction.

On appelle graphe moulin-à-vent un graphe constitué de triangles qui ont tous en commun un unique sommet appelé « sommet universel ».

5) *Lemme : le graphe fermé des voisins d'un sommet est un moulin-à-vent.*

On choisit un sommet v et on montre que tout voisin u de ce sommet est exactement sur un triangle avec v.

6) *Lemme : si un graphe d'amitié contient un sommet de degré 2alors c'est un moulin-à-vent.*

Voir Mertzios&Unger lemme 2

7) …
8) Faire l'exercice p4 du papier de Gabriel Pallier (ie. démonstration de : *il n'existe aucun graphe de 3-amitié*).

Références :

- Mertzios, G.B., &Unger, W. (2016). The FriendshipProblem on Graphs. J. Multiple Valued Log. Soft Comput., 27 : 275-285.

- Gabriel Pallier (2016) Une géométrie pour les graphes d'amitié, Quadrature 99 : 16-19.

- P. Erdös, A. Rényi, and V. Sós(1966) On a problem of graph theory.StudiaSci. Math.1:215–235