

Jeux combinatoires, nombres réels et nombres surréels !

Mickaël Matusinski (IMB, U. Bordeaux)

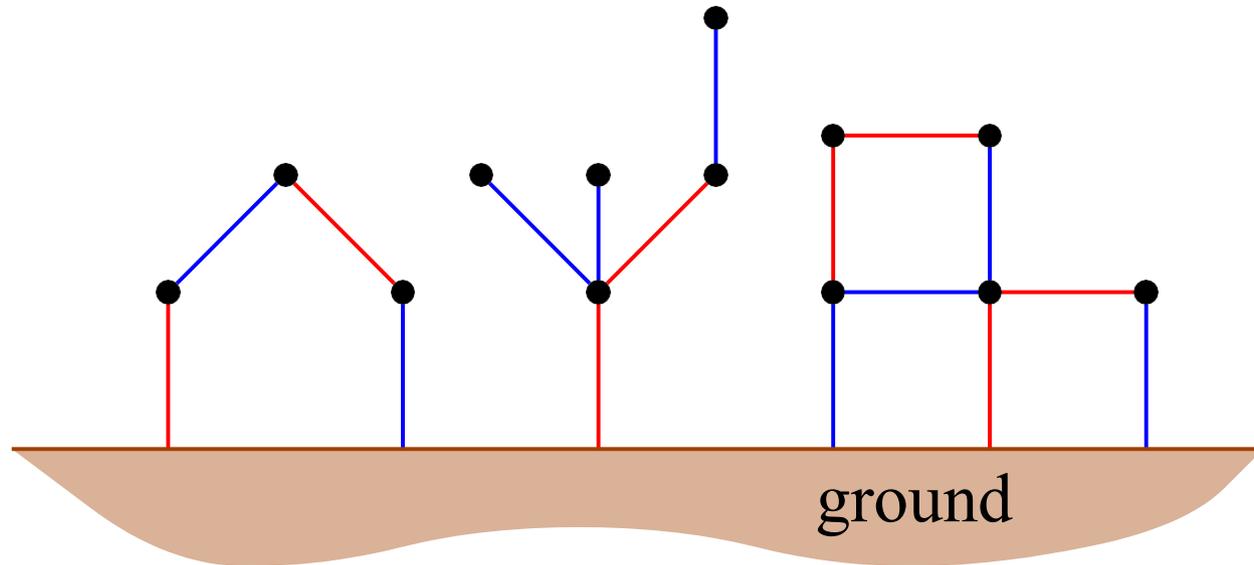
Maths en Jeans
Lycée Jean Monnet, Blanquefort,
20 septembre 2019

Des jeux et des nombres

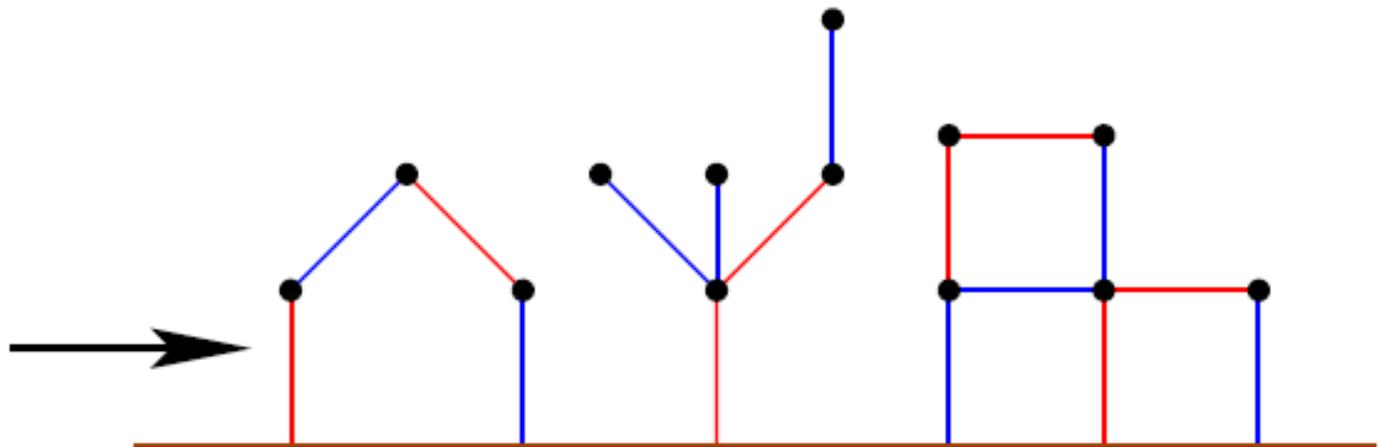
Le jeu de Hackenbush BicoloRe

Exemple

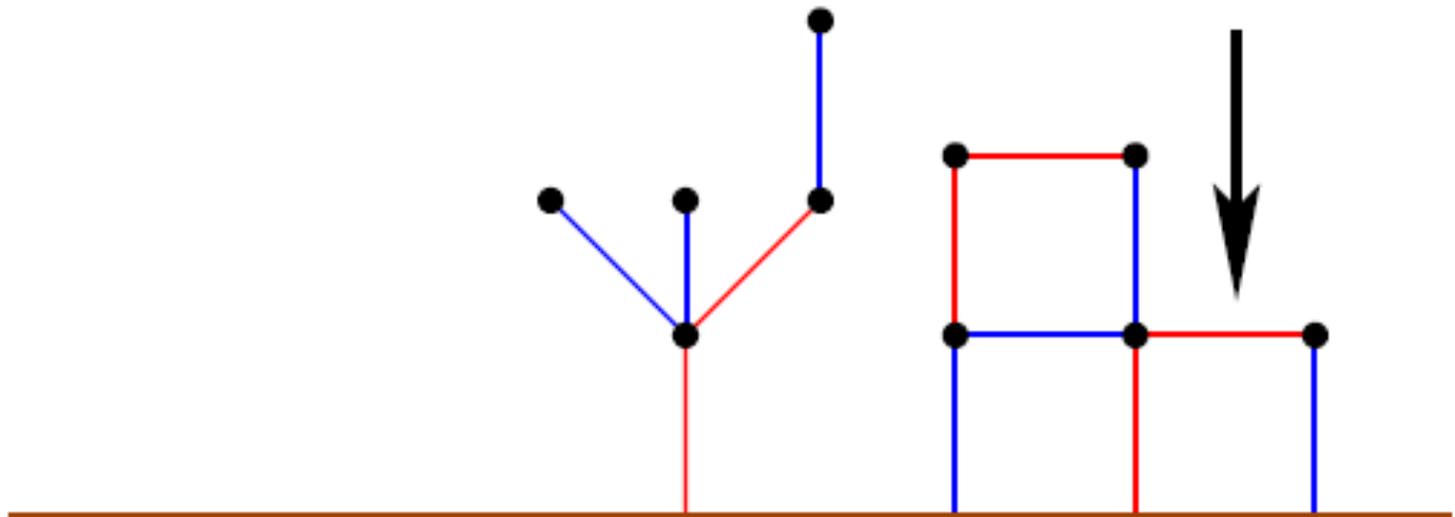
Exemple



Rouge commence



Au tour de Rouge



ETC...

Des jeux et des nombres

Qui va gagner ?

Des jeux et des nombres

Principes des jeux combinatoires

- ▶ **Deux joueurs** jouent face à face
- ▶ Les deux joueurs ont accès à **toute l'information** du jeu
- ▶ Il n'y a **pas de hasard**
- ▶ Les joueurs jouent à **tour de rôle**
- ▶ Le premier joueur qui **ne peut plus jouer perd**
- ▶ La partie se joue en un nombre **fini** de coups

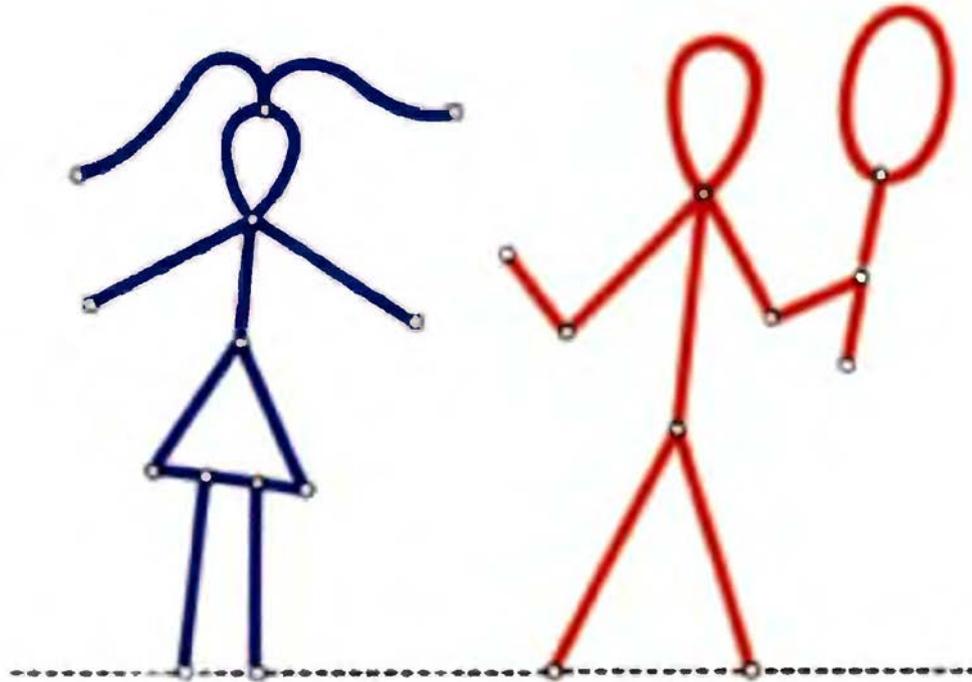
Des jeux et des nombres

Comment attribuer une valeur à un jeu ?

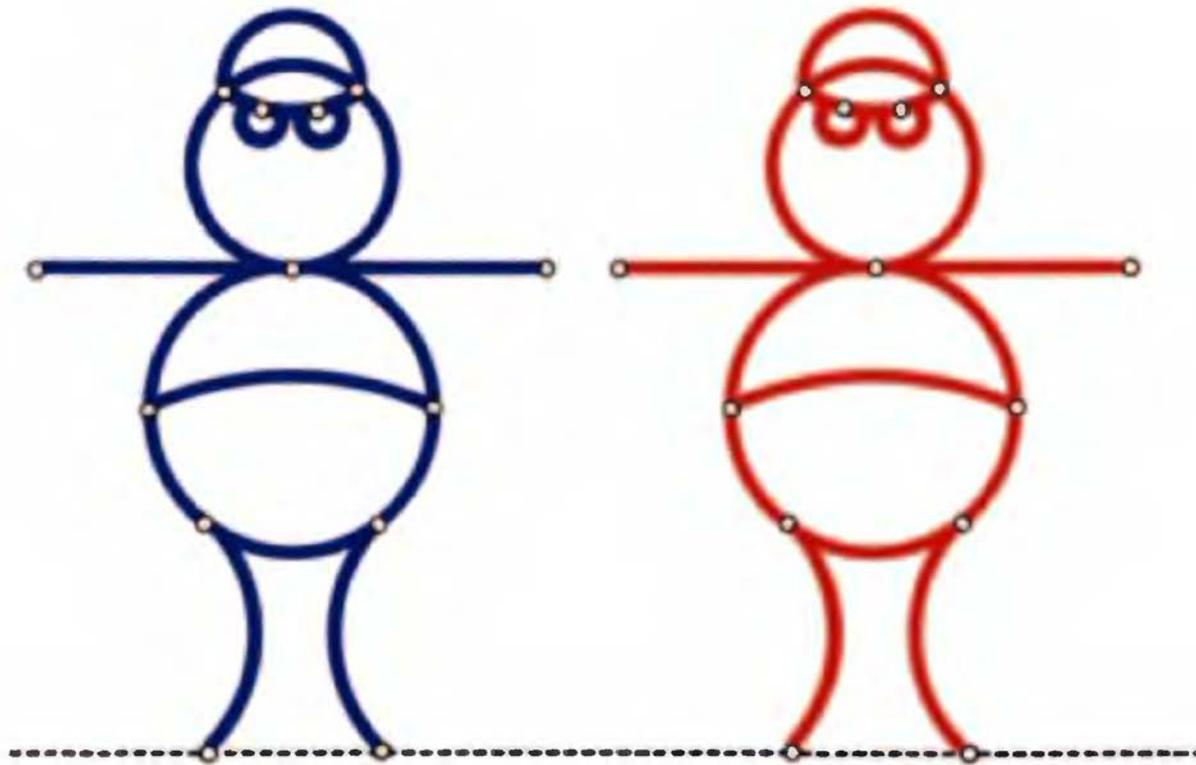
Principes : pour un jeu noté G , on note $v(G)$ sa valeur

- ▶ Si **Bleu** a une façon *certaine* de gagner, on pose $v(G) > 0$
- ▶ Si **Rouge** a une façon *certaine* de gagner, on pose $v(G) < 0$
- ▶ Sinon, c'est le premier qui joue qui est avantageé et on pose $v(G) = 0$

Exemple

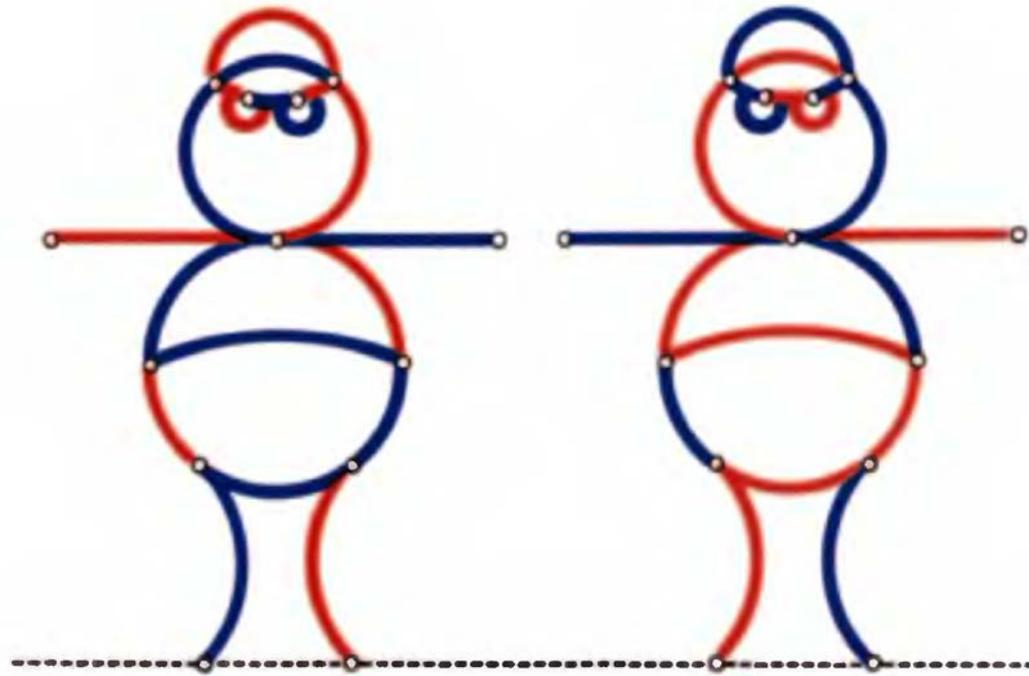


Un **rencontre**
 $14 - 11 = 3 > 0$



Tweedledum et Tweedeldee

$$17 - 17 = 0$$

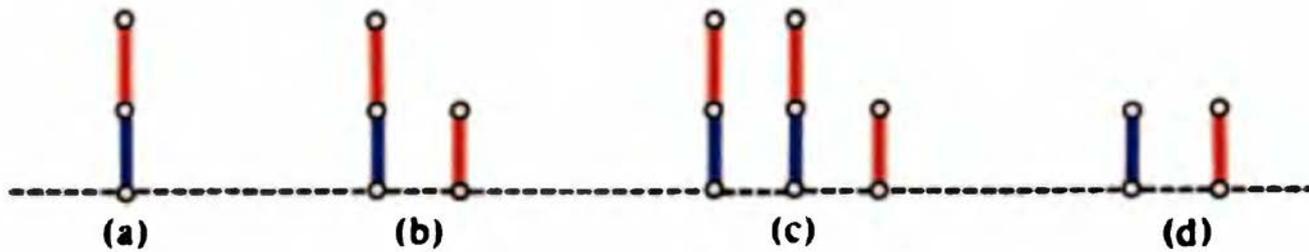


Tweedledum et Tweedeldee

$$v(G) = v(G_1) + v(G_2) = 0$$

$$\text{Donc : } v(G_2) = -v(G_1)$$

Une **demi**-victoire ?



Quelle valeur pour A ?

$$2v(A) - 1 = 0$$

Des jeux et des nombres

Principes : étant donné un jeu G , on lui attribue une valeur $v(G)$ à partir des valeurs des jeux plus simples qu'il contient. Ces valeurs correspondent à des options de **Bleu** ou de **Rouge**. D'après le principe précédent, les valeurs des options de **Rouge** ne sont **jamais** plus petites que les valeurs des options de **Bleu**.

Exemples :

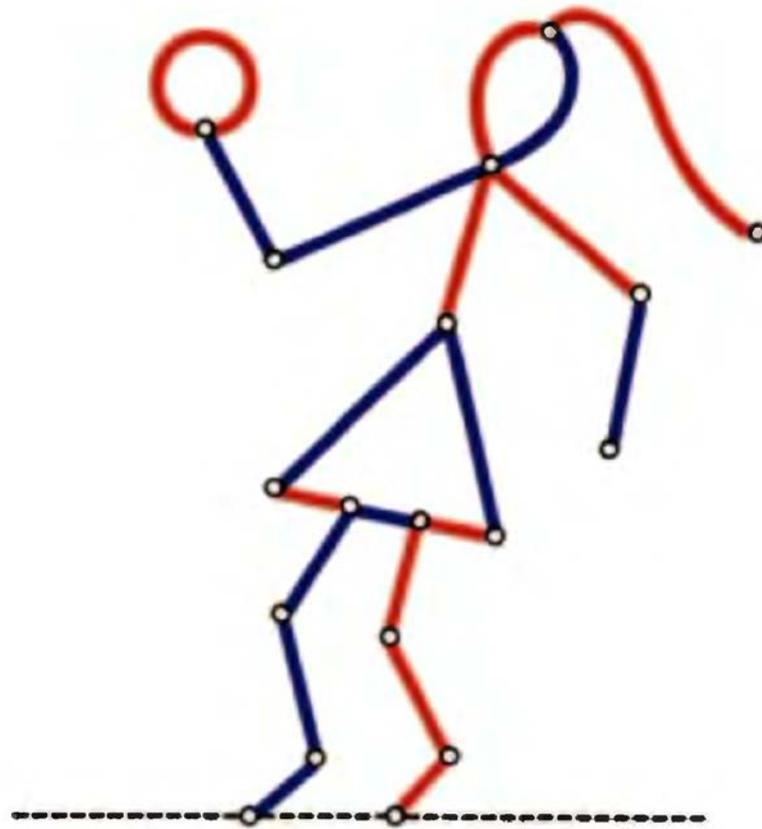
$$\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$$

$$0 = \{-1 \mid 1\} = \{-1, 1/2-1 \mid 1/2+1-1, 1\} = \{-1/2 \mid 1/2\}$$

Des jeux et des nombres

Règle de simplicité

S'il existe des nombres qui conviennent entre les valeurs des options de Bleu et les valeurs des options de Rouge, alors la valeur $v(G)$ du jeu est égale au **plus simple** de ces nombres.



Quelle valeur pour ce jeu ??