Quatre Propositions

Hervé Queffélec

23 janvier 2015

1 Propositions

1. Le problème des naufragés : 41 naufragés sont assis en cercle, au fond d'un canot de sauvetage qui tarde à être secouru, il n'y a presque plus rien à manger. Mais les naufragés se refusent au cannibalisme, préfèrent mourir, et décident de se jeter tous à la mer sauf deux qui seront tirés au sort, pour qui il restera assez de nourriture pour encore une semaine. Ces personnes sont numérotées de 1 à 41. On tourne en rond toujours dans le même sens, par exemple dans le sens contraire des navigateurs, qui est aussi le sens contraire des aiguilles d'une montre. La règle de tirage au sort est la suivante : la personne 1 commence, et jette ses compagnons à l'eau de trois en trois, par exemple : 1-2- 3 à l'eau. Puis 4-5- 6 à l'eau, etc... et à un moment cà va revenir dans la figure de la personne 1... Mais deux petits malins ont choisi des numéros avec lesquels ils sont sûrs d'être les deux derniers restants, ils pourront ainsi être sauvés de la noyade. Pouvez-vous trouver ces deux numéros ?
   Les nombres $n = 41$ et $k = 3$ (de trois en trois) sont bien sûr arbitraires. Le 41 a été choisi pour que la solution ne saute pas aux yeux, peut-être pourrait-on commencer avec $n = 11, k = 2$? Et aussi avec $n = 11, k = 3$? Puis $n = 41, k = 3$
   On prend $k = 2$ ou $k = 3$. Disons $k = 2$ au début. Peut-on trouver une méthode générale pour placer les deux survivants pour une grande valeur de n, disons $n = 91$? puis n n'importe comment, ou presque ?

2. Le mouvement des planètes :
   (a) La planète jaune (J) et la planète bleue (B) tournent autour du soleil avec des périodes respectives de 6 mois et 14 mois. Au départ, elles sont en conjonction avec le soleil. Au bout de combien de mois seront-elles de nouveau en conjonction ?
   (b) Les planètes J et B ont maintenant des périodes respectives de 13 et 17 mois. Au départ, elles sont en conjonction avec le soleil. Au bout de combien de mois J aura-t-elle parcouru un certain nombre de tours plus un sixième de tour et B un certain nombre de tours plus trois quatorzièmes de tour ?
   (c) Mêmes questions avec les planètes jaune (J), bleue (B) et verte (V). Avec les périodes 6, 14 et 21. Et avec un certain nombre de tours plus respectivement un sixième, trois quatorzièmes, et cinq vingt-et-unièmes pour la deuxième question.

3. Le problème du logarithme discret : Les gros mots, c'est juste pour faire joli !

   Quand on classe les nombres entiers en "pairs" et "impairs", on fait comme faisait Gauss (cf.le problème de $1+2+\ldots+100$ qu'il résolut sur son ardoise en moins de 1mn à l'âge de 6 ans), c'est-à-dire compter zéro chaque fois qu'un multiple de 2 apparaît. Par exemple, $6 = 2\times 3 = 0$ et $7 = 2\times 3+1 = 1$. Il ne reste donc que deux possibilités, 0 et 1. Mais on peut faire pareil avec 3 par exemple : si on efface tous les multiples de 3, il reste trois possibilités : $0, 1, 2$. Et avec 17, il reste 17 possibilités, les nombres de 0 à 16 inclus. Les mathématiciens ont montré que si le nombre de possibilités est ce qu'on appelle un nombre premier p, parmi les p possibilités de 0 à $p-1$, il y en a toujours une qui va reconstituer toute les autres (sauf zéro) à lui tout seul, par MULTIPLICATION. Cette possibilité s'appelle quelquefois un **générateur de p.**

   Et çà sert... par exemple pour le développement en base 10. Mais pour trouver ce générateur (il y en a plusieurs, on va viser le plus petit possible) c'est du décodage de haute volée, et on ne connaît pas d'algorithme pour cela. Nous allons voir la difficulté du problème sur des exemples :

   Prenons $p = 5$. Nous voyons que

   (a) $2 = 2$

   (b) $2 \times 2 = 2^2 = 4$

   (c) $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 = 5 + 3 = 3$

   (d) $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 3 \times 2 = 6 = 5 + 1 = 1$

   On a bien tout retrouvé (les quatre possibilités $1, 2, 3, 4$ dans le désordre), et 2 est générateur de 5. Mais si on essaie 2 avec $p = 7$, çà ne marche pas.

   (a) D'abord, pour se convaincre de l'utilité de la notion de congruence, trouver le chiffre des unités dans le développement en base 10 du nombre 3^{2015}

   (b) Vérifiez que çà (l'histoire du générateur) marche avec 3 (toujours $p = 7$). Trouvez le plus petit générateur qui marche avec $p = 11, 13, 17$ et enfin, cerise sur le gâteau, avec $p = 71$. Pas besoin de calculette ! mais de comprenette !

   (c) Le développement de $1/3$ en base dix est $0.3333333\cdots$ c'est donc un développement périodique de période 1 dans lequel le chiffre 3 se répète toujours. Trouver le développement en base dix de $1/5$ puis de $1/7$ et enfin de $1/17$. Qu'observez-vous ? Voyez-vous un rapport avec le problème du générateur ?

   Remarque. Ce sujet est un peu long. On pourra le raccourcir et le centrer au cours de notre prochain rendez-vous.

4. La marche du cavalier sur un échiquier : trouver une méthode pour faire parcourir à un cavalier une fois et une seule toutes les 64 cases d'un échiquier. Par exemple, on commence avec $Cb1 - a3$. Et ensuite ?