

Sujet 1 : Gendarme et voleur

Niveau : Lycée ou collègue

Thèmes abordés : combinatoire, algorithmique.

Un gendarme est informé qu'un voleur est en ville. Chacun se déplace à pied en suivant les rues. Le gendarme est-il sûr de pouvoir attraper le voleur en un temps fini ? Cela dépend-il de la configuration des rues ? Et si le gendarme et le voleur ont peu d'informations, chacun ne voyant que les carrefours voisins de sa position ? Et si le gendarme a un co-équipier ?

Ce problème de poursuite semble avoir été énoncé pour la première fois en 1967 :

R. Breisch(1967) An intuitive approach to speleotopology. SouthwesternCavers VI p72-78 (published by the SouthwesternRegion of the National Speleological Society).

A) Modéliser le jeu et travailler sur des exemples

- 1) Modéliser le jeu. D'abord passer du plan d'une ville au graphe des rues. Ensuite donner les règles de déplacement. Énoncer avec rigueur l'initialisation du jeu et la fin du jeu, si elle a lieu.
 - Qu'est ce qu'un sommet et qu'est ce qu'une arête ? sommet = carrefour ; arête = portion de rue entre deux carrefours successifs.
 - On suppose des graphes simples (ie. pas d'arêtes qui ont exactement les mêmes extrémités), connexes (ie. il existe toujours au moins un chemin entre deux sommets), non orientés, et avec un nombre fini de sommets. Il peut y avoir des boucles, pas de soucis.
 - Règle de déplacement : le voleur va d'un sommet à un voisin en suivant une arête puis c'est au tour du gendarme et ainsi de suite ... Chacun n'est pas obligé de se déplacer et peut choisir de rester sur place au lieu de se déplacer. (variante du jeu : lorsque c'est leur tour, le voleur ou le gendarme sont obligés de se déplacer).
 - Chacun sait à tout moment où l'autre est positionné.
 - Initialisation : le gendarme se positionne en premier puis le voleur. Dans l'autre sens, le gendarme se positionne sur la même case que le voleur et le jeu est terminé.
 - Fin : le jeu s'arrête lorsque le gendarme se trouve après un nombre fini de déplacements sur la case où est le voleur.
 - On dit qu'un graphe est gendarme-gagnant lorsqu'il existe une position du gendarme au départ telle que quelle que soit la position du voleur, le jeu s'arrête.
- 2) Traiter le cas d'exemples classiques : les arbres de profondeur finie sont gendarme-gagnants, les cycles de longueur finie sont voleur-gagnants, les graphes avec un sommet universel sont gendarme gagnant, ...
- 3) Montrer qu'il existe des exemples pour lesquels le « il existe » de la définition précédente ne peut pas être changé en « quel que soit ».
- 4) Montrer que certains graphes gendarme-gagnants deviennent voleur-gagnant si on enlève les boucles (ie. on utilise la variante du jeu).
- 5) À partir d'exemples, émettre une hypothèse sur un type de configuration qui fait que le graphe est voleur-gagnant. En déduire une conjecture sur les graphes qui sont gendarme-gagnants. (réponse : Graphes cordaux)
- 6) On généralise le jeu avec plusieurs gendarmes et 1 seul voleur. Les contraintes sont toujours les mêmes mais au lieu d'un gendarme qui se déplace, tous les gendarmes se déplacent simultanément avant que ce soit au voleur de bouger. Traiter les exemples 1 et 2 du papier de Parson (1978). Pour l'exemple 2 on peut imaginer le graphe en 3D comme un long tunnel ...
- 7) Montrer que toutes les hypothèses du jeu sont importantes : simple, connexe, non orienté, fini. C'est-à-dire que on peut trouver un graphe gendarme gagnant tel que si on rompt une des hypothèses alors il devient voleur gagnant. Regarder en particulier le cas des chemins (chemin fini vs. chemin infini)

B) Faire des preuves générales

1) Sommet dominé : on introduit la notion de sommet dominé.

Définition : Un sommet est dominé si son voisinage fermé est inclus dans le voisinage fermé d'un autre sommet.

Rappel : le voisinage fermé d'un sommet est l'ensemble de ses voisins union lui-même.

Travailler sur des exemples pour bien comprendre ce qu'est un sommet dominé.

2) On veut démontrer le lemme suivant :

Lemme : on suppose qu'un graphe est gendarme gagnant et contient un sommet dominé alors le graphe privé de ce sommet dominé est aussi gendarme gagnant

Rappel : Priver un sommet d'un graphe signifie qu'on enlève ce sommet et toutes les arêtes qui lui sont incidentes.

Pour montrer le lemme, on supposera qu'on a une stratégie du gendarme sur le graphe général et on cherchera à partir de celle-là à construire une stratégie sur le graphe privé du sommet dominé.

3) On veut montrer le lemme suivant :

Lemme : tout graphe gendarme gagnant contient au moins un sommet dominé.

Pour ça on se placera au tour juste avant que le gendarme ne capture le voleur. Il s'agit d'une configuration où le sommet du voleur est dominé par celui du gendarme.

Références :

- Aigner & Fromme (1984) : « cop suffisent pour un graphe planaire. Deux bloquent un cycle sur lequel est le rob et le troisième le poursuit.

- Parsons T.D. (1978) Pursuit-evasion in a graph. In: Alavi Y., Lick D.R. (eds) Theory and Applications of Graphs. Lecture Notes in Mathematics, vol 642. Springer, Berlin, Heidelberg.

- Notes personnelles de Gena Hahn