

L'élection du président.

Une élection présidentielle doit avoir lieu, disons en France. Les fonctionnaires de l'état souhaitent mettre en place un système de scrutin incontestable. Pour faire simple, on va supposer qu'il y a 5 candidats : Fillon, Hamon, Le Pen, Macron et Mélenchon, et qu'il y a 11 votants E_1, E_2, \dots, E_{11} . L'ordre des préférences de chaque électeur est donné dans le tableau suivant :

	1	2	3	4	5
E_1	Fillon	Macron	Hamon	Le Pen	Mélenchon
E_2	Macron	Le Pen	Fillon	Hamon	Mélenchon
E_3	Fillon	Macron	Hamon	Le Pen	Mélenchon
E_4	Macron	Hamon	Mélenchon	Fillon	Le Pen
E_5	Le Pen	Fillon	Macron	Mélenchon	Hamon
E_6	Le Pen	Mélenchon	Fillon	Hamon	Macron
E_7	Macron	Fillon	Mélenchon	Le Pen	Hamon
E_8	Mélenchon	Le Pen	Hamon	Macron	Fillon
E_9	Macron	Fillon	Le Pen	Hamon	Mélenchon
E_{10}	Hamon	Macron	Fillon	Mélenchon	Le Pen
E_{11}	Le Pen	Fillon	Macron	Mélenchon	Hamon

Une première façon possible d'élire le président est par "scrutin majoritaire à un tour". Chaque électeur vote une fois pour une personne et on retient le candidat ayant le plus de voix. Dans notre configuration on aurait :

Fillon	Hamon	Le Pen	Macron	Mélenchon
2 voix	1 voix	3 voix	4 voix	1 voix

et donc Macron serait élu.

Une seconde façon d'élire le président serait par "scrutin majoritaire à deux tours". Dans un premier temps chaque électeur vote pour son candidat préféré, comme ci-dessus. Après on garde les deux candidats qui ont obtenus le plus de voix (Le Pen et Macron) et on vote une seconde fois pour départager les deux candidats restants. Ainsi, dans notre configuration, les voix obtenues au second tour seraient :

Le Pen	Macron
4 voix	7 voix

Là encore, Macron serait élu.

Une troisième façon de procéder est d'attribuer à chaque candidat une note comme dans le concours de l'Eurovision. Dans celui-ci chaque juge (électeur) donne les notes 12, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 par ordre de préférence. Ici nous n'avons que 5 candidats possibles, aussi nous établirons une règle de ponctuation plus simple : 5 points pour le premier, 4 points pour le second, 3 points pour le troisième, 2 points pour le quatrième, et 1 point pour le dernier. Le nombre de points obtenus par chaque candidat serait alors :

Fillon	Hamon	Le Pen	Macron	Mélenchon
38 points	27 points	34 points	41 points	25 points

Là encore, c'est Macron qui serait élu.

Question 1 : Existe-t-il une configuration (avec 11 électeurs et 5 candidats) qui donne trois présidents différents selon les trois modes de scrutin expliqués ci-dessus ? Est-ce qu'une telle configuration existe avec deux candidats ? Est-ce qu'une telle configuration existe avec trois candidats ?

Les moteurs de recherche tels que Google utilisent des algorithmes qui ordonnent et/ou choisissent des pages selon des critères de popularité.

Question 2 : Pouvez-vous comprendre et expliquer la méthode utilisée par Google pour classer les pages ? Peut-on l'utiliser pour un scrutin électoral ? Si oui, donne-t-il un résultat différent de celui des trois méthodes ci-dessus ?

Les méthodes de scrutin actuelles sont perturbées par ce que l'on appelle le phénomène du "vote utile". Suite à des sondages des électeurs changent leur intention de vote s'ils savent que leur premier choix a peu de chances d'être élu, afin de privilégier un second choix qui aurait plus de chances. Ainsi, l'électeur E10 serait tenté de voter Macron et non pas Hamon dès le premier tour.

Question 3 : On part du principe que deux des électeurs votent utile. Existe-t-il une configuration (avec 5 candidats et 11 électeurs, ou plus) qui donne 5 résultats différents (en considérant les scrutins majoritaires à un tour et deux tours avec ou sans votes utiles et le scrutin type Eurovision) ?