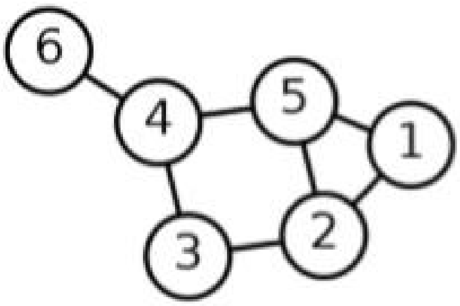
5. Problèmes se résolvant avec des graphes (T. Tabouy)

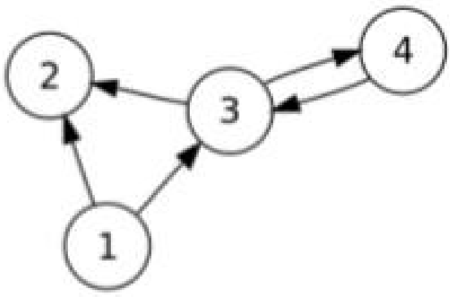
En science, une grande importance est donnée à la rigueur employée pour décrire ou encore définir ce que l'on étudie. Les mathématiques ne font pas exception à la règle : être clair et précis sur ce que l'on étudie est primordiale. Certains objets sont plus abstraits que d'autres, et il en est de très simple dont l'utilité pour résoudre des problèmes (ou même simplement pour mieux les comprendre) est grande. Attention cependant, simplicité rime rarement avec facilité en mathématiques ...

Dans ce problème nous allons introduire la notion de graphe qui vient de la théorie éponyme. Vous avez sans doute déjà eu à faire à des graphes dans votre vie : la carte des métros de Paris, facebook (plus généralement internet), votre arbre généalogique etc... Nous verrons comment des objets simple peuvent aider à résoudre des problèmes difficiles en apparences.

Notions de Théorie des graphes

Voici des graphes :





Un graphe $\mathbb{G}$ en mathématique est la donnée de deux ensembles : V qui contient les noeuds et E l'ensemble des arêtes. Pour reprendre l'exemple du métro parisien,

Exercice 0

Tracez les graphes suivants pour vous familiariser avec les notions décrites ci-dessus :

- ⋆ Tracez votre arbre généalogique en remontant jusqu'à vos grands-parents à l'aide d'un graphe. Une flèche ira d'un noeud à un autre si le premier noeud est le parent direct (c'est à dire le père ou la mère) du second noeud.
- ⋆ Tracez le graphe qui représente qui est ami facebook avec qui dans votre groupe de travail. Pensez à ce qui a été dit plus haut pour le tracer.

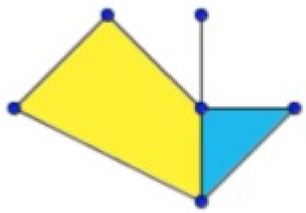
1 Lemme des poignées de mains

Définition 1. *Le degré d'un sommet d'un graphe est le nombre de liens (arêtes ou arcs) reliant ce sommet, avec les boucles comptées deux fois. Le degré d'un sommet s est noté* $\deg(s)$.

Le but ici est de trouver la relation qui existe, dans un graphe $\mathbb{G}$ non orienté de sommets V et d'arêtes E, entre les degrés des sommets de $\mathbb{G}$ et le nombre d'arêtes du graphe que l'on notera $|E|$ pour cardinal de E. Exprimer votre solution sous la forme d'un lemme (c'est à dire un petit théorème) suivi d'une démonstration claire et précise.

2 Théorème d'Euler-Descartes

Définition 2. *Un graphe est dit planaire si on peut le représenter dans le plan de telle sorte que ses arêtes ne se croisent pas.*



Il est assez facile de prouver qu'un graphe est planaire : il suffit de trouver une représentation dans le plan dont les arêtes ne se coupent pas ! C'est en revanche beaucoup plus difficile de prouver qu'un graphe n'est pas planaire, car il faut pouvoir démontrer qu'aucune représentation du graphe ne convient !

Une fois représenté dans le plan, un graphe planaire nous donne des données supplémentaires : on dispose de ses sommets, de ses arêtes, mais aussi des faces (ou des régions) que ces arêtes délimitent. Par exemple, dans la représentation planaire précédente, on a 3 faces (ou régions) : celle coloriée en jaune, celle coloriée en bleu, et la face extérieure au graphe.

Questions

Soit $\mathbb{G}$ un graphe planaire possédant s sommets, a arêtes et f faces. Le but ici est de trouver une formule reliant les nombres : s, f et s.

1. Que vaut a, f, s pour le graphe dessiné ce-dessus ?
2. Pouvez-vous conjecturer (c'est à dire proposer une solution à notre problème qui soit générale) la relation recherchée ?

3 Théorème des 4 couleurs

Nous nous intéressons ici au coloriage de graphes planaires (ou cartes). Nous voulons connaitre le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier n'importe quelle graphe (ou carte) planaire, de sorte que deux régions adjacentes (ou limitrophes), c'est-à-dire ayant toute une frontière (et non simplement un point) en commun reçoivent toujours deux couleurs distinctes.

Questions

1. Une idée du résultat ? Donnez un chiffre que l'on comparera à la vérité ensuite.

2. Colorier cette carte en suivant la règle édictée plus haut (que deux régions adjacentes (ou limitrophes), c'est-à-dire ayant toute une frontière (et non simplement un point) en commun reçoivent toujours deux couleurs distinctes). Qu'en pensez-vous ?

3. Et celle-ci ?

4. Recommencez jusqu'à ce que vous pensiez avoir trouvé la réponse :) Courage !
5. Conjecture ?