Sujet A : Sommes égales de puissances

Etant donné un ensemble A de p nombres, on peut toujours calculer la somme des éléments de A, qu'on note $S_1(A)$, la somme des carrés des éléments de A, qu'on note $S_2(A)$, etc...
Par exemple, si $A = \{2, 4, 5, 11\}$,

$$S_1(A) = 2+4+5+11 = 22 \qquad S_2(A) = 2^2+4^2+5^2+11^2 = 4+16+25+121 = 166$$

$$S_3(A) = 2^3 + 4^3 + 5^3 + 11^3 = 8 + 64 + 125 + 1331 = 1528...$$

On note E_n l'ensemble des entiers compris entre 1 et $2n$:

$$E_n = \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n\}$$

******

Question 1 : A quelle condition sur n peut-on diviser E_n en deux parties de n nombres chacune A et B, de sorte que $S_1(A) = S_1(B)$?

Il est clair que pour $n = 2$, c'est possible : $E_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ et on peut poser $A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 3\}$: $S_1(A) = 1 + 4 = 5$ et $S_1(B) = 2 + 3 = 5$. Est-ce possible pour $n = 3$, et pourquoi? Pour $n = 4$? etc.

******

Considérons $A = \{3, 9, 12\}$ et $B = \{4, 7, 13\}$. On remarque que

$$S_1(A) = 3 + 9 + 12 = 24 \qquad \text{et} \qquad S_1(B) = 4 + 7 + 13 = 24$$

$$S_2(A) = 9 + 81 + 144 = 234 \qquad \text{et} \qquad S_2(B) = 16 + 49 + 169 = 234$$

Question 2 : Trouver des entiers n tels qu'on puisse diviser E_n en deux parties A et B de n nombres chacune, de sorte que $S_1(A) = S_1(B)$ **et** $S_2(A) = S_2(B)$, et donner une méthode pour construire une telle partition.

******

Question 3 : On veut cette fois diviser E_n en deux parties A et B de n nombres chacune telles que $S_1(A) = S_1(B)$, $S_2(A) = S_2(B)$ **et** $S_3(A) = S_3(B)$. Trouver des entiers n pour lesquels c'est possible, ainsi qu'une méthode pour définir A et B.