Sujet 3. Images chamboulées

On considère une image carrée ou rectangulaire, constituée d'un nombre fini de pixels : On place sur l'image un quadrillage de $2n$ lignes et $2m$ colonnes ($n = m$ si l'image est carrée). L'image est ainsi subdivisée en $2n \times 2m$ petits carrés. Pour nous, chaque petit carré correspondra à un pixel.

On applique la transformation suivante à l'image, appelée transformation du boulanger (elle fait penser au travail du boulanger, qui étire la pâte avant de la replier sur elle-même). La première étape est de créer un rectangle $n \times 4m$: la première ligne du nouveau rectangle est constituée de $4m$ pixels, et est obtenue en fusionnant les deux premières lignes de l'image de départ, et en alternant les pixels de ces deux lignes. La deuxième ligne du nouveau rectangle est obtenue à partir les lignes 3 et 4 de l'image de départ, etc. Voici ce que cela donne si $n = m = 2$:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	5	2	6	3	7	4	8
9	13	10	14	11	15	12	16

Le rectangle obtenu est constitué de deux sous-rectangles, celui de droite et celui de gauche. On obtient l'image transformée en faisant pivoter le rectangle de droite de 180 degrés, afin qu'il vienne sous le rectangle de gauche, ce qui donne :

1	5	2	6
9	13	10	14
16	12	15	11
8	4	7	3

1. On demande de donner la transformation dans les cas où on a 6 lignes

et 6 colonnes (et donc 36 pixels), et dans le cas de 8 lignes et 8 colonnes (64 pixels).

2. On peut appliquer plusieurs fois successives cette transformation. Finit-on toujours par retomber sur l'image de départ? Si oui, au bout de combien d'étapes? Le nombre d'étapes dépend probablement du nombre de lignes et de colonnes de la subdivision!

On pose les mêmes questions pour la transformation suivante, appelée "photomaton" : on divise d'abord l'image $2n \times 2m$ en carrés de 4 pixels chacun. Chaque pixel en haut à gauche d'un carré 2×2 va se placer à l'endroit correspondant dans une image $n \times m$. De même pour les 3 autres pixels de chaque carré 2×2. Cela donne 4 "petites" images $n \times m$, qu'on rassemble pour obtenir l'image transformée. Si $n = m = 2$, cela donne :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Image de départ

1	3	2	4
9	11	10	12
5	7	6	8
13	15	14	16

Image transformée