Configurations sur un damier.

On considère un damier de dimensions $n \times m$. Une configuration consiste en l'attribution à chacune des nm cases du numéro 0 ou du numéro 1.

On dispose d'une règle de deux cases. Lorsqu'on l'applique sur le damier, les numéros des deux cases du damier qu'elle recouvre changent. C'est-à-dire qu'on a la possibilité de changer une configuration en changeant les numéros de deux cases qui ont un côté en commun.

Question 1 : On suppose que toutes les cases du damier ont le numéro 0. Est-il possible, par des applications successives de la règle sur le damier, d'aboutir à la configuration où toutes les cases ont le numéro 1?

Question 2 : Plus généralement, peut-on obtenir ainsi n'importe quelle configuration à partir de la configuration ne présentant que des 0? Dans le cas où la réponse est non, on dira que deux configurations A et B sont dans la même classe s'il est possible de passer de l'une à l'autre par des applications successives de la règle. Pouvez-vous trouver une condition pour que A et B soient dans la même classe? Et combien y a-t-il des classes de configurations?

Question 3 : On suppose à présent que la règle dont on dispose a trois cases. C'est-à-dire qu'on a la possibilité de changer une configuration en changeant les numéros de trois cases adjacentes, alignées horizontalement ou verticalement. Traiter les questions 1 et 2 dans ce cas (plus difficile...).

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Configuration 1

0	1	0	0
0	1	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Configuration 2

0	1	0	0
0	1	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

Configuration 3

0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

Configuration 4

Exemple : on passe de la configuration 1 à la configuration 4 par trois applications d'une règle de trois cases. Les configurations 1,2,3 et 4 sont dans la même classe.