Sujets MATh.en.JEANS 2019

1 Et si la terre était plate ?

Une enquête de la fondation Jean Jaurès [1] estime que 9% des français pensent que la Terre est plate (on appelle ces personnes les *platistes*). Les théories diffèrent suivant les personnes mais nous allons prendre ici celle qui suppose que la Terre serait une immense pizza dont la croûte est un mur de glace (un peu comme dans *Game Of Thrones*) : ce serait l'antarctique (au sud du globe terrestre) qui n'est pas pour ces platistes un continent et le pôle nord serait donc le centre du disque.

Partant de cet axiome, nous allons essayer de reconstruire la forme de la Terre telle que la voient les platistes (voir la figure 1). Pour cela, nous pouvons commencer par nous demander comment projeter les longitudes et les latitudes ; quelles tailles font-elles notamment ? Quelle est la longueur du rayon ? Quelle aire fait la terre des platistes ?

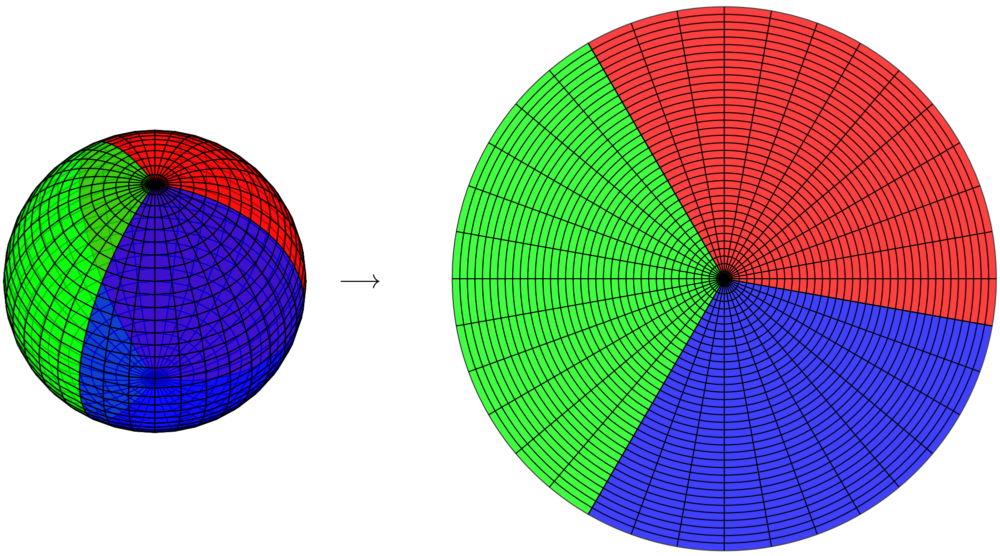

FIGURE 1 – Figure de l'exercice 1 où nous schématisons le passage de la boule à sa projection vers un disque.

Une fois les réponses obtenues, nous pouvons nous demander comment se représente la France ? Et des pays dans l'hémisphère sud comme l'Australie ? Est-ce que l'île de la Réunion serait toujours plus petite que la Grande Bretagne ? Quel pays serait alors le plus grand du monde ?

2 Échec et domino

Prenons un échiquier, c'est-à-dire un carré de 64 cases (8 lignes et 8 colonnes), et des dominos qui font la taille de deux cases. Est-il possible de recouvrir totalement l'échiquier avec ces dominos ?

Imaginons maintenant que nous enlevons deux cases situées à deux sommets opposés (en haut à gauche et en bas à droite) et posons nous la même question. Est-ce que la réponse est identique ? Et si on enlève deux cases n'importe où sur l'échiquier ?

De même, que se passe-t-il si on prend des dominos plus gros (par exemple des rectangles de 3 cases par 2) ? Ou alors des formes totalement différentes ? Ou des échiquiers plus originaux ? Est-il possible de savoir *facilement* si on pourra recouvrir la zone complètement ou non ?

1. Retrouver l'étude sur `https://jean-jaures.org/nos-productions/le-conspirationnisme-dans-l-opinion-publique-francaise`

3 Sondages et temps de parole

Durant un moment, il avait été question de donner le temps de paroles de candidats à une élection en fonction des intentions de votes obtenues dans les sondages. Concrètement, cela veut dire que si deux candidates (Alice et Barbara) se présentent à une élection et qu'un sondage suggère que 40% des gens pensent voter pour Alice et 60% pour Barbara alors Alice aura 40% du temps de parole tandis que Barbara aura 60%. Dans ce sujet, nous essayons d'évaluer l'influence de cette réforme sur les votes.

Pour cela, partons du principe qu'un premier sondage est fait sur 100 personnes pour savoir pour qui chacun pense voter et chaque personne a 60% de chance de répondre Barbara et 40% Alice. À la suite de ces réponses (par exemple, 35 répondent Barbara et 65 Alice), le temps de paroles est calculé (65% Barbara et 35% Alice) et nous faisons l'hypothèse que cela influence les probabilités de vote de la même façon pour le sondage suivant. Que se passe-t-il si nous répétons l'opération une centaine de fois ? Est-ce que les résultats changent si nous interrogeons plus ou moins de personnes ? Si les pourcentages de départ sont très différents (par exemple 10% contre 90%) ?

Enfin, comme ouverture, nous pouvons aussi imaginer que le temps de paroles n'influence que partiellement sur les votes et voir comment les résultats évoluent.

4 Cryptologie et Statistique

Une façon d'encoder un texte est de prendre, par exemple, pour chaque lettre, la suivante (A→B, B→C, …, Y→Z, Z→A). En terme mathématique, si on associe à chaque lettre un chiffre (A=0, B=1, …, Z=25), cela revient à ajouter 1 et à conserver le reste dans la division euclidienne par 26. Or, nous pourrions décider, par exemple, de multiplier le chiffre par 3, ainsi :

$$\begin{aligned} A = 0 \to 0 \times 3 = 0 &\quad \text{donc} \quad A \to A, \\ B = 1 \to 1 \times 3 = 3 &\quad \text{donc} \quad B \to D, \\ &\quad \vdots \\ Z = 25 \to 25 \times 3 = 2 \times 26 + 23 &\quad \text{donc} \quad Z \to X. \end{aligned}$$

Si on prend n'importe quelle fonction affine (donc de la forme $f(x) = ax + b$), est-ce qu'on obtient toujours un codage que nous pouvons décrypter ? Autrement dit, est-ce qu'à une lettre du texte crypté correspond une unique lettre du texte original ? Est-ce qu'à deux couples (a, b) et (a', b'), le codage sera-t-il forcément différent ? Existe-t-il d'autres fonctions qui permettent d'avoir des codages différents de ceux des fonctions affines ?

Imaginons qu'un texte crypté arrive et que vous n'avez pas la clef pour le décrypter. Si vous faites un décryptage par seconde, combien de temps faudra-t-il pour essayer tous les textes possibles ?
Au IX$^{\text{ème}}$ siècle, Al-Kindi a remarqué que certaines lettres apparaissaient plus souvent que d'autres. Il a donc proposé, si le texte est assez long, d'associer la lettre du texte crypté qui revient le plus souvent à la lettre le plus souvent utilisé dans la langue, puis la deuxième à la deuxième... Comment feriez-vous pour tester ce codage ?

5 L'ivrogne

Le patron d'un bar new-yorkais jette dehors un homme ayant trop bu avant d'appeler le SAMU social. En admettant que les rues de New York sont perpendiculaires et infinies et en supposant que notre ivrogne se dirige vers une intersection voisine choisie aléatoirement par lui en une minute. Où le SAMU, qui arrive 30 minutes après, a-t-il le plus de chances de trouver l'ivrogne ? Comment optimiser la recherche des personnes du SAMU (suivant leurs nombres), d'abord en supposant qu'ils ne voient pas plus loin qu'une intersection puis sur toute la ligne ? Augmente-t-on les chances s'ils arrivent à communiquer entre eux ?
Que se passe-t-il si nous nous trouvons dans des rues plus chaotiques comme Paris ?

6 Dames chinoises

Deux adversaires s'opposent dans un jeu simplifié de dames chinoises. Chacun possède quatre pions disposés comme sur la figure 2.

A	B			1	3
C	D			2	4

Figure 2 – Figure pour l'exercice 6

Chacun leur tour, les joueurs choisissent de sauter leur tour ou de jouer un pion, soit en l'avançant d'une case adjacente (gauche, droite, bas, haut), soit en sautant par dessus un pion (allié ou adverse) à condition que la case de derrière soit vide. Vous avez les lettres et votre adversaire les chiffres.
À la première partie, votre adversaire joue de la façon suivante : il commence par avancer le pion 1, puis le pion 2, le 3, le 4 et à nouveau le 1 et ainsi de suite. S'il n'y a pas de pion devant lui, il avance simplement. S'il y a un seul pion, il le saute. S'il y a deux pions, il joue le suivant et continue le cycle. Enfin, si tous les pions sont bloqués, il décide de ne pas jouer.
Proposer une stratégie optimale pour le battre.
À la deuxième partie, votre adversaire s'aperçoit qu'il est plus rentable de commencer son cycle par le pion 3. Pouvez-vous le battre ?
Que se passe-t-il si le joueur garde la même stratégie mais en choisissant au hasard, à chaque étape, le pion parmi les pions pouvant avancer ?
Existe-t-il une stratégie optimale en toute circonstance ? Une stratégie pire que toutes les autres ?
Que se passe-t-il si vous jouer à deux sur un vrai plateau de dames chinoises ? Et à six joueurs ? En supposant que chacun joue pour soi ? En supposant que les autres joueurs se liguent contre vous ?

7 Lever un crayon

Parmi les figures 3, on peut dessiner certaines en ne levant jamais le crayon, d'autres en levant une ou deux fois le crayon exactement.

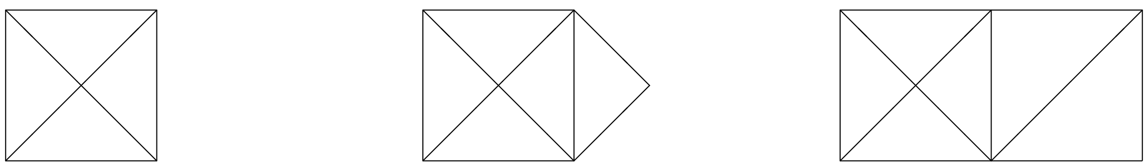

Figure 3 – Figure pour l'exercice 7

Comment savoir, au premier regard, combien de fois sera-t-on obligé de lever le crayon pour reproduire une figure ?

8 La clé du mystère

Dans un commissariat, les $n \geq 3$ inspecteurs n'ont pas tellement confiance entre eux. Ainsi, la salle des pièces à conviction est fermée par plusieurs serrures de telle sorte que :

— 3 inspecteurs quelconques ou plus peuvent ouvrir la salle

— Mais 2 quelconques ou moins ne peuvent jamais l'ouvrir

Combien faut-il de serrures au minimum ?

Généraliser pour un nombre minimal $m \leq n$ d'inspecteurs.

Un commissaire vient d'être muté dans le commissariat. La règle reste la même pour les inspecteurs mais le commissaire doit pouvoir ouvrir la pièce si l'un des inspecteurs est avec lui mais pas s'il est tout seul. Combien a-t-on au minimum de serrures ?

9 Le charlatan et l'intelligence artificielle

Vous êtes un charlatan qui veut participer à un concours de potions magiques [2] où vous avez à votre disposition un sac contenant deux types d'ingrédients : des ingrédients *explosifs* et des ingrédients *bonus* avec chacun un pouvoir magique numéroté de 1 à 3. Le but est de créer une potion la plus puissante possible (c'est-à-dire avec la plus grande somme des ingrédients magiques) en choisissant judicieusement les ingrédients. Le petit problème est que vous n'avez pas le droit de regarder dans le sac quel ingrédient vous prenez et, comme vous êtes un charlatan, vous ne savez pas faire la différence entre les ingrédients *explosifs* et les ingrédients *bonus*. Vous allez donc devoir les choisir au hasard. Par contre vous savez que, dans votre sac, il y a 10 ingrédients répartis en :

— 4 ingrédients *explosifs* de puissance 1, 2 de puissance 2 et 1 de puissance 3.

— 1 ingrédient *bonus* de puissance 1, 1 de puissance 2 et 1 de puissance 3.

Il y a trois règles à se souvenir :

1. Vous tirez les ingrédients les uns après les autres et après chaque tirage, vous avez le droit de vous arrêter.
2. Dès que vous sortez un ingrédient du sac, vous devez le mettre dans votre marmite (pas le droit de le remettre discrètement dans le sac et d'en tirer un autre).
3. Si la somme des puissances des ingrédients *explosifs* dépasse strictement 7, votre marmite explose et vous avez perdu.

La question qu'on peut donc se poser est de savoir comment maximiser les chances d'avoir une potion la plus puissante possible. Par exemple, on peut choisir de s'arrêter s'il reste dans le sac au moins un jeton qui peut faire exploser la marmite (par exemple si j'ai déjà tiré les jetons *explosifs* de puissances 3 et 2 et que si je tire un jeton *explosif* de puissance 1, la somme atteint 8) mais, dans ce cas, on risque peut-être d'être trop frileux. On peut aussi décider de s'arrêter lorsque le risque de faire exploser la marmite dépasse 1 chance sur 2 ou lorsque nous avons tiré tous les jetons bonus.

Pour répondre à cette question, nous pouvons commencer par regarder quelles configurations font exploser la marmite ? Quelles sont celles qui donnent la plus grande puissance magique ? Nous pouvons aussi prendre une stratégie et regarder la probabilité d'atteindre la puissance magique magique maximale ou une puissance au moins supérieure à 10 par exemple.

Comme il y a beaucoup de stratégies possibles et que faire tous les calculs peut parfois être complexe, nous pouvons aussi utiliser les principes de l'intelligence artificielle : nous programmons quelques stratégies auxquelles nous pensons et nous les faisons s'affronter un grand nombre de fois pour voir celle(s) qui gagne(nt) le plus souvent. Nous pouvons aussi réfléchir à des stratégies évolutives : nous laissons à l'ordinateur choisir au hasard une stratégie et s'il gagne, faire en sorte qu'il la choisira plus souvent à l'avenir alors que s'il perd, il faudrait qu'il la choisisse moins souvent. Nous pourrons alors observer les stratégies qui fonctionneraient le mieux.

2. Cet exercice est une libre adaptation du jeu de société de 2018 appelé *Les charlatans de Belcastel*