

Sujet Maths en Jean 2016

1 Produit de nombres

Prenons un nombre entre 10 et 99 (par exemple 77) et multiplions les deux chiffres qui le compose ($7 \times 7 = 49$). Si nous avons encore un nombre entre 10 et 100, nous recommençons jusqu'à n'obtenir qu'un seul chiffre :

$$77 \rightarrow 49 \rightarrow 36 \rightarrow 18 \rightarrow 8. \quad (1)$$

Dans notre exemple, le chiffre 77 mène à 8, on dira alors que 77 est un *antécédent* de 8 et que 8 est la *finalité* de 77 (ici, 8 est également la finalité de 49, 36 et 18). Enfin, on parlera de *chaîne* pour parler de la suite de chiffres obtenue (comme dans le cas de l'équation (1)).

Est-on sûr que chaque nombre possède une finalité? Ou est-ce qu'une chaîne peut avoir des nombres qui sont toujours plus grands? Ou alors, un nombre qui va créer un cycle (c'est-à-dire qu'à un moment, on retombe sur un chiffre déjà présent dans la chaîne)? Est-ce que tous les chiffres possèdent un antécédent? Est-ce qu'il y a des chiffres qui reviennent plus souvent que d'autres comme *finalité*?

Peut-on avoir une idée de la *finalité* d'un nombre au premier coup d'oeil? Par exemple, les nombres pairs (ou alors impair) sont-ils les antécédents des mêmes chiffres? Quelles sont les conditions pour obtenir 5 comme finalité?

Et peut-on généraliser les conclusions précédentes à tous les nombres plus grands que 100?

2 Un chien fugueur

Un homme promène son chien dans les rues de New-York. Un peu fatigué, il décide de se reposer un peu sur un banc à l'angle de deux rues et s'endort immédiatement. Le problème est qu'il avait mal attaché son chien qui décide de partir un peu en balade. Admettons que les rues de New York sont perpendiculaires et infinies et supposons que le chien se dirige vers une intersection voisine choisie aléatoirement par lui en une minute. Où le maître, qui se réveille 30 minutes après, a-t-il le plus de chances de le trouver?

Le maître décide de demander de l'aide à des passants. Comment optimiser la recherche suivant leurs nombres? D'abord en supposant qu'ils ne voient pas plus loin qu'une intersection puis sur toute la ligne? Augmente-t-on les chances s'ils arrivent à communiquer entre eux? Que se passe-t-il si nous nous trouvons dans des rues plus chaotiques comme Paris?

3 Agence de sécurité

Une agence de sécurité propose de sécuriser votre maison à base d'un faisceau qui déclencherait une alarme dès qu'il est coupé. Ce faisceau peut rebondir sur différents miroirs. Sur l'exemple de la figure 1, on peut voir un seul faisceau parcourant les 7 pièces. Mais cela n'empêche

pas le passage de la pièce 2 à la pièce 6 sans le couper. L'entreprise vous engage pour réfléchir sur les possibilités d'optimiser la sécurité à moindre coût. De nouveaux contrats pourront arriver avec différentes configurations pour les pièces.

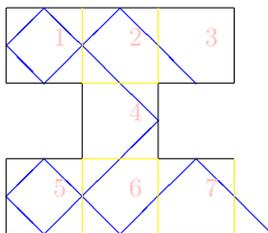


FIGURE 1 – Sécurité : les traits jaunes délimitent les pièces mais ne gênent pas pour passer.

4 Épizootie

Une maladie se répand chez les animaux de la façon suivante : à chaque instant, nous avons dans l'ordre pour chaque malade :

1. Un animal malade peut contaminer chaque animal de son entourage avec probabilité p_C .
2. Un animal malade peut guérir tout seul avec probabilité p_G .
3. S'il n'est pas guéri, il peut mourir avec probabilité p_M .

Suivant les différentes valeurs de p_C , p_G et p_M , que va-t-il se passer si les services d'hygiène ne font rien ? Le gouvernement décide d'agir, il a deux possibilités :

1. Vacciner une partie des animaux.
2. Isoler la population en petits groupes.

Suivant différents critères (coût, pertes animales...), discuter de la qualité de ces méthodes.

5 La guerre des Gaules

Deux villages gaulois Rififix et Pacifix sont voisins depuis toujours mais ne peuvent pas se supporter. Chaque année, pour chaque village, on observe que :

- chaque habitant du village a un enfant avec probabilité p_e ,
- chaque habitant a une probabilité p_{mn} de mourir naturellement,
- chaque habitant a une probabilité p_t^R (pour le village Rififix, resp. p_t^P pour le village Pacifix) d'être tué par le village adverse. On admettra que si l'année d'avant, il y a N_R habitants dans le village Rififix et N_P dans le village Pacifix alors $p_t^R = \frac{cN_R}{N_R+N_P}$ et $p_t^P = \frac{cN_P}{N_R+N_P}$ avec $c \in]0; 1[$.

Que va-t-il se passer si les deux villages continuent de se faire la guerre ?

Que se passera-t-il si le village Pacifix décide d'être moins agressif que le village Rififix (c'est-à-dire que c dépend du village avec $c_P < c_R$) pour se concentrer sur une meilleure natalité (c'est-à-dire que $p_e^P > p_e^R$) ?

6 Un nouvel opérateur

Monsieur et madame Johnson aiment bien créer de nouveaux opérateurs. Madame propose de créer un opérateur \circ de telle sorte que pour tout entier a et b , nous ayons :

$$a \circ a = a + 2, \quad a \circ b = b \circ a \quad \text{et} \quad \frac{a \circ (a + b)}{a \circ b} = \frac{a + b}{b}.$$

Monsieur Johnson dit alors :

- Je pense que pour tout entier a et b , le nombre $a \circ b$ n'est pas forcément un entier.
- Je ne crois pas, répondit Madame, tu confonds avec la condition que $\frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{a}$. En revanche, je pense qu'ils sont tous positifs.
- Je ne suis pas sûr de ça. Cela dépend du signe de a et de b .

Que pensez-vous de cette discussion ?

Êtes-vous capable de calculer la valeur de $a \circ b$ quelque soit les valeurs a et b qu'on vous donne ?