

Sujet Math en Jeans 2019: Financement du déplacement au congrès Math en Jeans par la vente de gâteaux

Yvan Le Borgne

Septembre 2018

Le problème

Le proviseur du collège vous a autorisé vendre tout les jours des gâteaux à l'entrée du collège pour financer votre voyage au congrès math en jean. Taquin, il a simplement exigé que les prix de vente de chaque gâteau soit un nombre entier de francs¹ de 1 à 6 francs et pour des raisons de santé publique que chaque collégien achète au plus un gâteau par jour. Généreux, il vous a fait don de réserves pour l'instant inépuisables et non-périssables de gâteaux de k sortes numérotées de 1 à k .

Chacun des n collégiens qui franchit la porte du collège est un de vos client potentiel. On modélise sommairement le comportement du collégien i grâce à une fonction d'utilité qui donne une évaluation en francs qu'il attribue à chaque sorte de gâteau: ainsi pour la sorte de gâteau j , le collégien lui attribue l'utilité de $u_i(j) := u_{i,j}$ francs, une valeur comprise entre 0 et 5 francs.

Par exemple, pour un collège de quatre élèves avec les trois sortes de gâteaux, l'utilité de chaque sorte pour chaque élève peut se représenter par le tableau suivant.

Sorte j de gâteau	1	2	3
<i>Alice</i>	5Fr	2Fr	3Fr
<i>Bob</i>	1Fr	1Fr	5Fr
<i>Claire</i>	2Fr	5Fr	3Fr
<i>Denis</i>	1Fr	2Fr	1Fr

On suppose que ces utilités ne changent pas au cours de l'année, mais a priori vous ne les connaissez pas.

Chaque matin, vous avez la possibilité de fixer les prix de chaque sorte de gâteau, la sorte j à le prix de vente v_j avec $1 \leq v_j \leq 6$.

Par exemple le premier matin vous avez fixé les prix suivants:

Sorte j de gâteau	1	2	3
Prix de vente v_j	2Fr	3Fr	2Fr

On suppose que tout les collégiens aiment bien "faire la meilleure affaire" plus que manger leur gâteau préféré. On décide de modéliser leur comportement d'achat par la règle suivante. Le collégien i considère son éventuel bénéfice sur le gâteau de sorte j

$$b_{i,j} := u_i(j) - v_j$$

c'est à dire son utilité selon son estimation moins son prix. Parmi les éventuelles sortes de gâteau pour lesquelles son bénéfice n'est pas strictement négatif, le collégien i choisi celui qui lui assure un bénéfice maximal. Si plusieurs sortes lui apporte le bénéfice maximal, il choisi la sorte j la plus petite.

Sur l'exemple, les bénéfices des collégiens sont

¹anciens ou nouveau

Sorte j de gâteau	1	2	3
<i>Alice</i>	$5 - 2 = 3Fr$	$2 - 3 = -1Fr$	$3 - 2 = 1Fr$
<i>Bob</i>	$1 - 2 = -1Fr$	$1 - 3 = -2Fr$	$5 - 2 = 3Fr$
<i>Claire</i>	$2 - 2 = 0Fr$	$5 - 3 = 2Fr$	$3 - 2 = 1Fr$
<i>Denis</i>	$1 - 2 = -1Fr$	$2 - 3 = -1Fr$	$1 - 2 = -1Fr$

donc Alice achète le gâteau de sorte 1 pour 2Fr, Bob celui de sorte 3 pour 2Fr, Claire celui de sorte 2 pour 3Fr et Denis n'achète rien.

On suppose que le collègue va ouvrir T jours, par exemple $T = 100$ avant votre congrès.

Quelle stratégie envisagez vous pour gagner un maximum d'argent ?

Remarque culturelle: Ce problème ressemble par son compromis entre exploration et exploitation au problème des bandits manchots. (Multi-armed bandit)