Eléments de géométrie du monde végétal

1. Le début de l'histoire : la répartition des feuilles sur une plante

Pour une plante donnée on peut mettre la plupart du temps en évidence deux nombres :

- Le nombre de tours nécessaire pour que deux feuilles se superposent, noté a.

- Le nombre de feuilles à partir de la première jusqu'à celle qui se superpose, notée b.

On trouve pour les couples (a, b) possibles dans la majorité des plantes les valeurs suivantes :

(1,2) (1,3) (2,5) (3,8) (5,13) (8,21) (13,34)...

On peut calculer l'angle de divergence qui est l'angle $360 \times a/b$.

Calculer cet angle pour un nombre croissant du nombre de tours. Qu'observez-vous ?

Nous allons montrer que cette suite de nombre a des propriétés mathématiques particulières que nous allons étudier.

2. Suite de Fibonacci

La *suite de Fibonacci* est une suite de nombres dans laquelle chaque nombre est égal à la somme des deux précédents. On fixe deux nombres de départ que l'on note u_0 et u_1. On calcul alors le suivant en faisant $u_1 + u_0$ que l'on va noter u_2 et ainsi de suite.

Faire quelques exemples de suite de Fibonacci.

La suite la plus couramment évoquée est celle qui a comme point de départ 0 et 1.

Écrire cette suite particulière.

On la retrouve dans l'évolution d'une population de lapins qui n'ont pas de prédateurs (les lapins d'Australie !).

Calculer pour les 10 premiers termes le rapport entre deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci en prenant le nombre à un rang donné avec le nombre du rang précédent. Qu'observez vous ?

A priori, vous avez du voir que ce rapport semble aller vers une valeur qui ressemble à 1.618.... Ce nombre est très spécial. On l'appelle le nombre d'or et il intervient dans beaucoup de domaines très différents. Ici il apparaît naturellement dans les spirales du monde végétal. Il vaut précisément

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. Suite de Fibonacci et pavage du plan

On peut obtenir cette suite d'une manière complètement par une construction géométrique. On commence par tracer un carré de côté 1, auquel on accole un carré semblable, puis un carré de côté 2, puis un carré de côté 3, puis de côté 5, et ainsi de suite. Le côté du carré suivant est égal à la somme des côtés des deux carrés précédents.

Représenter cette construction.

On voit apparaître un rectangle dont les proportions se rapprochent du nombre d'or.

Tracer dans chaque carré un quart de cercle. Observer la figure obtenue.

Il faut dire qu'on ne s'attendait pas spécialement à ce qu'une spirale se cache dans l'évolution d'une population de lapins.

4. Suite de Fibonacci et fractale

On peut coder différemment encore la suite de Fibonacci. On se donne un alphabet à deux lettres 0 et 1 et une règle de transformation. La lettre 1 se transforme en 0 et la lettre 0 en 01. On construit alors une suite de mots à partir d'une lettre donnée et en collant le résultat de la transformation sur chaque lettre. On a par exemple :

$$1 \to 0 \to 01 \to 010 \to 01001 \to ...$$

Faire un tableau avec pour colonne le nombre de transformations, le nombre d'éléments du mots, le nombre de 1 et le nombre de 0. Qu'observez-vous ?

Lorsqu'on ne comprend pas bien un objet, on cherche souvent à le voir différemment. C'est le cas de cette suite de Fibonacci. Nous allons maintenant lui associer une représentation géométrique différente du pavage précédent. Nous allons à chaque étape de construction d'un mot lui associer une courbe de la manière suivante :

Pour chaque lettre du mot on trace un segment. Si la lettre est 1 on va tout droit. Si la lettre est 0 on tourne à gauche si la position du 0 dans le mot est en rang impair et on tourne à droite si la position du 0 dans le mot est en rang pair.

Représenter la courbe obtenue.

Encore une fois, nous avons une courbe qui exhibe toutes les propriétés des fractales.