Question de tempérament

Musique et mathématiques

Gérard Montseny

septembre 2019

1 Quelques notions de base

On rapelle ci-après, en vrac, quelques définitions, termes ou notions simples qui devront être bien assimilées avant d'aborder l'étude proprement dite.

- **Son** Le son est un phénomène de vibrations de l'air perçues par l'oreille (et le cerveau). Ces vibrations sont émises par une source qui met en mouvement l'air autour d'elle, puis se propagent sous forme "d'ondes acoustiques" dans l'air environnant (comme des ronds dans l'eau, mais dans toutes les directions) à la vitesse de 343 m/s avant d'atteindre l'oreille qui *à ce moment-là* "capte" le son (et le cerveau "l'entend").

- **Hauteur d'un son** Parmi l'infinité de sons que l'oreille peut entendre, on peut distinguer les sons qui sont associés (par le cerveau) à une "hauteur" (par opposition aux sons "percussifs" ou encore aux sons qu'on désigne sous le terme de "bruit" et pour lesquels aucune impression de "hauteur" n'apparaît naturellement). Ainsi, à un son de flûte, de trompette, ou encore de corde (guitare, piano,...) est de façon naturelle associée une notion de *hauteur de ce son*: une corde courte émettra un son plus aigu qu'une corde longue. Parmi les sons qu'on peut associer à une hauteur bien définie, les plus "parfaits" sont les sons *entretenus* (ou continus), comme les sons émis par un tuyau sonore (flûte). Outre leur hauteur bien définie et aisément identifiable, de tels sons semblent "stationnaires" dans le temps (du moins le temps où le son est émis). Ils sont évidemment à la base de la construction des "notes", et ce sont donc ceux qui nous intéressent ici.

- **Fréquence d'un son (entretenu)** Pour un son de hauteur bien définie, c'est à dire "entretenu" au moins pendant un temps suffisamment long pour que le cerveau puisse sans ambiguïté y associer une hauteur, il est possible de définir la notion de "fréquence" (de ce son): il s'agit du *nombre de vibrations par secondes* que capte le typan qui reçoit ce son (on n'approfondira pas davantage cette définition). Il se trouve que la hauteur perçue est directement liée à cette fréquence: un son "grave" correspond à une fréquence basse, un son aigu à une fréquence élevée. L'unité de mesure de la fréquence est le Hertz (Hz); 1 Hz signifie: 1 vibration par seconde.

  Une oreille humaine standard peut entendre des sons graves à partir d'une fréquence aux alentours de 20 Hz, et des sons aigus jusqu'à 20 kHz[1].

  Attention: ce qui vient d'être dit concerne les sons suffisamment "purs"; un son de très basse fréquence peut néanmoins continuer à être perçu lorsqu'il est "riche en harmoniques" (aigües). Cependant, sa hauteur (en tant que "note" n'est alors plus vraiment définie: on entend plutôt un bruit, comme par exemple le moteur d'une moto, dont la fréquence du son émis peut être de quelques Hz seulement). On ne précisera pas davantage ces notions ici.

  Les "note" de musiques seront ainsi associées à des fréquences particulières: *c'est la notion de fréquence qui permet d'aborder l'étude des gammes par la voie des mathématiques*!

- **Battement** Lorsque deux sons entretenus de fréquences *assez voisines* sont entendus simultanément, on perçoit une variation plus ou moins rapide de la force (ou amplitude) du son résultant. Cela découle du fait que les deux sons n'étant pas à la même fréquence, les variation de pression (sur le tympan!) ne sont pas synchronisées et tantôt se renforcent (lorsqu'elles vont "dans le même sens"), tantôt s'affaiblissent (lorsqu'elles vont "en sens contraire"). Cette variation plus ou moins

[1] Pour des jeunes! Car avec l'âge, l'acuité auditive diminue: à 60 ans, on ne perçoit en général plus les sons au-delà de 15 kHz, voire moins; mais cela n'empêche en rien d'écouter de la musique, les sons les plus importants pour la musique se situant entre 60 Hz et 4 kHz.

rapide de l'amplitude du son résultant s'appelle un *battement*. La fréquence de ce battement est égale à la *différence des fréquences* des deux sons ainsi superposés.

Lorsque ces battement sont très lents (c'està dire lorsque les deux sons ont des fréquences très voisines), ils paraissent "naturels", voire agréables, en donnant une impression de stabilité et de plénitude sonore. Lorsqu'ils ont une fréquence de l'ordre de quelques Hertz, ils sont au contraire perçus comme moins agréables (voire désagréables), au sens ou les deux sons sont clairement séparés tout en étant voisins: le résultats est plus agressif, donnant l'impression de deux sons mal assortis ou "désaccordés". C'est là le point central qui a conduit les musiciens et les facteurs d'instruments de musique à définir une "bonne" manière d'accorder leurs instruments.

Mais des battement apparaissent aussi avec deux notes de fréquences très différentes (et avec les mêmes propriétés concernant la "qualité" du son résultant), lorsque celles-ci sont assez voisines de deux fréquences dans un rapport arithmétique simple. Précisons les choses.

Supposons un mélange de deux sons de fréquences respectives f_1 et f_2 telles que $\frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{2}$. Le résultat sera perçu comme un nouveau son très stable (cela provient du fait que f_1 et f_2 sonts toutes deux *multiple entier* d'une même fréquence $f_0 = \frac{f_1}{2} = \frac{f_2}{3}$, ce qui entraîne un *synchronisme* entre les deux sons). Si maintenant on considère le mélange de deux sons de fréquences respectives f_1 et $f_2' = f_2 + \varepsilon$ (avec ε petit devant f_2), alors le résultat fera entendre un battement du fait que $\frac{f_1}{f_2'}$ est à la fois *voisin et différent* de $\frac{3}{2}$. On aurait la même chose en considérant les rapports 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$ etc. (pour des rapports plus complexes, plus grands que 2 ou plus petits que $\frac{1}{2}$, ces battements s'estompent peu à peu).

C'est la recherche de battements les plus lents possibles (voire nuls!) qui gouverne l'accordage des instruments musique!

- **Intervalle entre deux sons de hauteurs différentes** Lorsqu'on mélange deux sons de fréquences différentes, l'oreille humaine entend ces deux sons distinctement. Cependant, lorsque ces fréquences sont dans un rapport arithmétique simple, une grande *stabilité* du son résultant apparaît. Cette stabilité a un effet psychoacoustique très attractif, tout particulièrement pour les rapports les plus simples: 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$. Un tel mélange stable (ou suffisamment stable) de deux sons dans un rapport de fréquence simple prend en musique le nom d'*intervalle*.

  Les différents types d'intervales rencontrés en musique ont chacun un nom dont l'origine n'est pas directement liée au rapport de fréquence, mais à la distance séparant les deux notes correspondantes, selon l'ordre fixée, de longue date, par la gamme "naturelle[2]". Ceci est décrit ci-après pour les principaux intervalles.

- **Octave (intervalle)** L'intervalle d'octave correspond à un rapport de fréquences égal à (ou "suffisamment voisin" de) **2**, soit: $\frac{f_1}{f_2} \simeq 2$. Dans ce cas, le mélange est tellement "parfait" qu'on a l'impression qu'il s'agit deux deux notes "équivalentes", au sens où ells diffèrent seulement par leur hauteur, mais produisent "quasiment" le même "effet au plan mélodique"; à tel point que de façon universelle, on donnera le même nom à deux telles notes: une octave est ainsi l'intervalle qui sépare deux *do* différents et consécutifs. Il y a bien 8 notes entre ces deux *do*, d'où le nom d'octave donné à un tel intervalle.

  C'est le mélange le plus stable[3] (avec l'intervalle tivial d'*unisson*, qui correspond à un rapport de fréquences égal à 1: $f_1 = f_2$).

- **Classes d'octaves, notes** En réitérant, à partir d'une fréquence f_1 (choisie a priori), l'intervale d'octave, vers les sons aigus aussi bien que vers les sont graves, on obtient un ensemble de sons qui sont tous "équivalents" au sens mélodique. Cet ensemble (qui, mathématiquement, est une "classe d'équivalence") s'appelle encore une *note* (mais cette fois en tant que classe). Lorsqu'on parle de *ré*, par exemple, sans préciser davantage, on fera ainsi référence à n'importe quel *ré* de cet ensemble, puisqu'ils sont tous équivalents.

  L'ensemble de ces "classes d'octaves" est alors l'ensembles des (noms de) notes disponibles pour constituer des mélodies. Ainsi, dans la *gamme* diatonique habituelle, on dispose de 7 notes: *do, ré, mi, fa,sol,la,si* (qui sont traditionnellement rangées par ordre de hauteur croissante).

[2] C'est-à-dire la succession des notes: *do, ré, mi, fa,sol,la,si,do*.

[3] Il est tellement stable, qu'il n'a finalement, en soi, que peu d'intérêt au plan musical!

Bien évidemment, les mélodies sont néanmoins construites en faisant la distinction entre les notes de même nom mais de hauteurs différentes! Les différentes notes du même nom seront en pratique notées, lorsque c'est nécessaire, au moyen d'un indice, par exemple: $ré_1$, $ré_2$, etc., de sorte que le rapport de fréquences entre $ré_2$ et $ré_1$ soit égal à 2:

$$\frac{f_{ré_{i+1}}}{f_{ré_i}} = 2,\ i = 1, 2, 3, ...$$

- **Octave (segment de fréquences)** Le terme octave désigne indifféremment, selon le contexte, non seulement un intervalle (en tant que mélange de sons entretenus), mais également (c'est le poids des traditions!) tout segment de fréquences de la forme $[f,\ 2f]$. Ainsi, une octave pourra également désigner tout groupe de notes dont les fréquences sont toutes à l'intérieur d'un tel segment[4]. En conséquence, les rapports de fréquences entre deux notes d'une même octave seront toujours compris entre 1 et 2.

  Pour bien distinguer ces deux notions, on notera *Octave* (avec majuscule) tout segment $[f, 2f]$.

  Le rapport de fréquences entre deux notes d'une même Octave est toujours un nombre compris entre 1 et 2.

- **Quinte** Après l'octave qui est l'intervalle non trivial le plus "consonant", on trouve la *quinte*, intervalle essentiel car il va porter à lui seul, une fois la notion de classe d'octaves bien comprise, la construction de toutes les notes utilisables (et utilisées!), ce de manière quasi universelle. La construction des notes à partir du seul intervalle de quinte conduit à la gamme dite *pythagoricienne* (du nom du célèbre géomètre grec de l'antiquité, qui ne s'est pas contenté d'inventer son théorème!).

  L'intervalle de quinte correspond au rapport de fréquences le plus simple après 2, c'est à dire **3**, et donc, *en considérant, par équivalence d'octave, les notes à l'intérieur d'une même Octave* (c'est à dire pour des rapports compris entre 1 et 2), au rapport de fréquences $\frac{3}{2}$. Il se trouve que, selon l'ordre des notes rangées par hauteurs croissantes, une quinte correspond à un écart de 5 notes (par exemple *do-sol* ou *ré-la*), d'où le nom donné traditionnellement à cet intervalle.

  L'intervalle de quinte est d'une stabilité et d'une douceur extrême, tout en mettant en mélange deux notes résolument non équivalentes du point de vue mélodique. En ce sens, la quinte a exercé de tout temps et en tout lieu une fascination indéniable et une attraction esthétique puissante chaque fois que les hommes ont pu consruire des instruments capables de produire plus d'un son à la fois (tout particulièrement des instruments à cordes, du fait que la hauteur des sons produits est alors facile à ajuster, simplement en réglant la tension des cordes).

  Ainsi, dès lors qu'on peut régler à volonté les fréquence f_1 et f_2, on vérifie aisément que lorsque le rapport avoisine $\frac{3}{2}$, il surgit un "ilôt de stabilité attractive", qui conduit tout naturellement à "accorder en quinte" (en recherchant la stabilité maximum par un *battement quasi nul*); ce même pour des oreilles non exercées!

- **Quarte** L'intervalle de Quarte n'est autre qu'un intervalle de quinte... à une octave près[5]. Précisons cela en considérant la succession de notes dans une même Octave: do_1*, ré, mi, fa,sol,la,si,*do_2. L'intervalle do_1-*sol* étant une quinte, par équivalence des deux *do*, l'intervalle[6] *sol*-do_2 semblerait devoir l'être également. Mais puisque $f_{do_2} = 2\ f_{do_1}$, le rapport des fréquences entre ces deux notes est alors

$$\frac{f_{do_2}}{f_{sol}} = 2\frac{f_{do_1}}{f_{sol}} = \frac{2}{\frac{f_{sol}}{f_{do_1}}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

  On appelle quarte tout intervalle dont le rapport de fréquences est égal à (ou très voisin de) $\frac{4}{3}$; quatre notes séparent deux notes distantes d'une quarte, d'où le nom donné à cet intervalle. Ainsi, *do-fa*, *ré-la*, etc sont des quartes.

  Du point de vue de la construction des notes, quinte et quarte sont des intervalles équivalents (puisqu'à une octave près pour l'une des deux, les notes sont équivalentes: $do_1 \Leftrightarrow do_2 \Longrightarrow do_1$-*sol* $\Leftrightarrow$ *sol*-do_2*).* L'intervalle de quarte est, comme la quinte, d'une grande douceur.

[4] Par exemple, un groupe de 12 notes consécutives sur le clvier d'un piano sera appelé octave.
[5] Dans le jargon musical, on dit que la quarte est le *renversement* de la quinte.
[6] On range les notes par ordre de hauteurs croissantes.

La quarte sera utilisée en remplacement de la quinte lorsque cet intervalle conduirait à quitter l'Octave considérée. Ainsi, par quintes/quartes successives, on va pouvoir construire de façon naturelle et mécanique, toutes les notes d'une même Octave, en particulier les notes dites "diatoniques" (toutes séparées d'une quinte dans cette suite): *fa,do,sol,ré,la,mi,si*, mais également, en poursuivant le processus, les "dièses" et "bémols": *si,fa♯,do♯,sol♯,...*[7]), jusqu'à remplir toute l'Octave de ses 12 notes chromatiques (les 12 touches qu'un piano contient dans chacune de ses Octaves: 7 touches blanches + 5 touches noires).

- **Tierce** Après la quinte (et la quarte), l'intervalle le plus consonant est la *tierce*[8] (lorsqu'elle est *juste*!). Il est associé au nombre (premier) **5**[9] et correspond, du point de vue du rapport de fréquences ramenées par équivalence à une même Octave, au rapport $\frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{4}$ et à une distance de 3 notes (par exemple *do-mi* ou *fa-la*[10]), d'où le nom donné à cet intervalle. Les curiosités de l'arithmétique ont ainsi conduit à attribuer le nom de quinte au rapport de fréquences faisant intervenir le nombre 3, et de tierce au rapport de fréquences faisant intervenir le nombre 5: on fera attention à éviter les confusions!

  Si l'intervalle de quinte est indéniablement à la base de la musique "mélodique", on peut dire de même que c'est la tierce qui constitue le fondement de la musique *polyphonique*, c'est à dire faisant entendre des *accords*, constitués du mélange d'au moins trois sons simultanés.

  En outre, si la quinte est un intervalle stable, reposant, se suffisant à lui-même, la tierce (du fait que le rapport des fréquences est "moins simple") crée au contraire une ambiance moins stable et donc plus "expressive".

- **Autres intervalles** Bien d'autres intervalles possibles apparaissent à mesure qu'on construit les notes d'une même Octave. Leurs rapports de fréquences seront toujours *plus ou moins voisins* de combinaisons arithmétiques simple *idéales* faisant intervenir les seuls nombres 2, 3 et 5. On reviendra sur ce point important le moment venu.

- **Mode, gamme** Une fois choisi un ensemble de notes (les classes d'octaves!) ainsi construites, on peut disposer ces notes sous forme d'une suite de hauteurs croissantes au sein d'une même Octave. C'est ainsi qu'a été obtenue la *gamme* traditionnelle diatonique[11]: *do, ré, mi, fa,sol, la, si, do.*

  Mais il est tout aussi possible de "démarrer" par exemple avec la note *ré*, ce qui donne alors une autre gamme (constituée des mêmes notes, mais organisées différemment): *ré, mi, fa,sol, la, si, do, ré*, et on peut faire de même à partir de n'importe laquelle des notes de cet ensemble. A chacune de ces gammes correspond un *mode*.

  Le mode reflète simplement la manière dont on privilégie une note particulière, à savoir la première et la dernière (qui est la même que la première, une octave au-dessus) de la gamme, note qui prend alors une place prépondérante dans les mélodies construites selon ce mode. Cette note particulière est appelé *fondamentale* ou *tonique*. Bien que ce soient toujours les mêmes notes utilisées, du fait que la tonique est une note privilégiée, elle impose par sa présence une certaine "ambiance", qui sera très différente d'un mode à l'autre.

  La notion de mode ne sera pas importante dans le cadre de cette étude.

- **Diapason** On appelle *diapason* une note (c'est à dire une fréquence f_0) particulière, choisie par convention comme "point de départ" pour la construction de toutes les autres notes. Ainsi, le diapason actuel de la musique occidentale est le la_3, de fréquence 440 Hz.

  On peut sans restriction changer le diapason : les notes construites seront alors de fréquences différentes, mais les rapports de fréquences, fixés par le processus de construction des notes, restent quant à eux inchangés.

[7] Il ne restera plus ensuite qu'à "ranger" ces notes par ordre de hauteurs croissantes pour obtenir la gamme *chromatique* complète.

[8] Il s'agit ici de tierce dite *majeure.*

[9] Le nombre 4 étant égal à 2×2, il est à nouveau associé à l'intervalle d'octave.

[10] Attention: il s'agit ici de tierces *majeures.* D'autres intervalle comme *ré-fa* ou *mi-sol* sont des tierces mineures, qui correspondent à un autre rapport de fréquences. On ne les considérera pas dans cette étude.

[11] On fait référence à ces notes dans un souci pédagogique, de manière à illustrer ce propos introductif par des exemples concrets. Dans l'étude proprement dite, on ne fera en revanche aucune référence à des notions déjà connues, l'objectif étant de construire les notes de musique à partir de la seule expérience auditive.

2 Travail à effectuer

Dans un premier temps, les élèves devront bien se familiariser avec les diverses notions "abstraites" introduites dans la section précédente.

2.1 Etude des battements

Le travail des élèves consistera, dans un premier temps, à bien étudier, puis définir ce qui constitue la base de ce projet, à savoir un *outillage conceptuel*, basé sur la notion de fréquence d'un son et à partir duquel on sera en mesure de qualifier comme objectivement "agréable" ou "désagréable" le mélange de deux sons. Le côté agréable se traduira en fait pas la *stabilité* du mélange, c'est à dire la *lenteur du battement*. Des expériences acoustiques permettront de donner à cette première partie une assise concrète indispensable, tout en exhibant (et discutant) l'aspect "universel" de cette idée de "mélange agréable"[12].

Pour les élèves suffisamment armés au plan mathématique (lycée), on s'attachera en premier lieu à étudier par la voie mathématique[13] le phénomène de battement. Pour cela, on partira de la définition d'un son *périodique* (archétype d'un son dont la hauteur est bien définie):

Dfinition 1 *Une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique s'il existe $T > 0$ tel que:*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t+T) = g(t);$$

Tout nombre T vérifiant cette propriété est une ***période****; on appelle* ***Période*** *(avec majuscule) de g le plus petit de ces nombres T.*

Par abus, on appelera également *période* un "morceau" de cette fonction g, défini par sa restriction à un intervalle de temps de longueur la période: $[t_0, t_0 + T]$. Cela correspond, dans notre étude, à *une vibration élémentaire* du son g. On montrera en particulier que la fréquence d'une telle fonction g est alors l'inverse de la période.

On étudiera ensuite le phénomène de battement en considérant le son (fonction) $g = g_1 + g_2$ obtenu par addition de deux sons périodiques $g_1$et g_2 de fréquences f_1 et f_2 différentes.

Au plan physique, il sera bon de se munir de quelques outils:

- piano ou synthétiseur électronique, guitare, etc, tout instrument capable de faire entendre plus d'un son à la fois, de manière à exercer l'oreille sur l'écoute de ces battements
- fréquencemètre (facile à trouver parmi les applications dédiées aux téléphones portables), qui permettra de confirmer par des mesures physiques ce que les élèves entendent
- ordinateur permettant de "synthétiser" des sons entretenus ainsi que de mélanger deux de ces sons, de manière à entendre ce que donnent les divers réglages des paramètres du son
- ...

Il s'agira ensuite de se doter d'un (puis de plusieurs) "monocorde(s)", c'est à dire d'un instrument constitué d'une seule corde dont on pourra faire varier à volonté la hauteur du son émis. Concrètement, ce monocorde pourra être matérialisé par exemple par une guitare, ainsi que par un petit programme convenable sur un ordinateur. L'objectif étant de disposer d'un instrument (réel ou virtuel) vierge qu'on va ensuite pouvoir "accorder".

Au bout de ce travail de défrichage, les élèves seront capables de bien comprendre et décrire, tant au plan mathématique qu'acoustique, ce qu'est un mélange "agréable" de deux sons de fréquences différentes (qu'il s'agisse de sons synthétisés ou de sons naturels).

[12] C'est en effet cette "universalité" qui fait que les notes qu'on trouve partout et à toutes les époques sont quasiment toujours et au moins en grande partie un sous-ensemble plus ou moins grand d'un même ensemble (excepté pour certaines musiques plus "rudimentaires" où il n'a jamais été besoin de mélanger les sons entre eux).

[13] Il ne s'agira pas de rechercher la rigueur absolue, mais plutôt de définir et d'analyser ces phénomènes au moyen des outils mathématiques au sens le plus large (y compris de simples dessins ou, bien sûr, d'un ordinateur).

2.2 La gamme de Pythagore: quintes justes + classes d'octaves (justes)

Une fois armés de l'*outil du battement* (et de leurs *monocordes*), les élèves pourront alors étudier comment se construisent naturellement les notes de proche en proche (à partir d'une première note de référence, le *diapason*, choisie arbitrairement), simplement en se basant sur le rapport de fréquences non trivial *le plus stable* (en ce sens le plus "agréable"), qui est 3/2, c'est à dire la *quinte*.

Ils découvriront lors de cette phase comment diverses gammes de la musique sont obtenues, en limitant le processus à un nombre réduit d'étapes: gamme pentatonique, gamme diatonique. Puis, en poursuivant ce processus de proche en proche, on complètera la gamme jusqu'à retomber (presque!) sur le diapason (la note de départ), fermant ainsi le "cycle des (12) quintes". Cette gamme ainsi obtenue est la *gamme* (chromatique) *Pythogoricienne*.

On constatera alors (et on étudiera quelle en est la raison mathématique!) que "le cycle des quintes ne peut pas se fermer correctement": après 12 quintes consécutives, la note obtenue à partir d'un diapason donné n'est pas tout à fait la note correspondant à ce diapason: les deux fréquences, ramenées à une même Octave, sont légèrement différentes, ce qui produit un battement "anormal". En particulier, la *dernière quinte de la série est vraiment fausse*, produisant un battement très désagréable, qui la rend inutilisable pour la construction d'accord: pour cette raison, cette quinte (la douzième du cycle) est appelée *quinte du loup*.

On étudiera également la "qualité" (au sens des battement) des intervalles produits par la gamme pythagoricienne pour conclure que les notes de cette gamme ne permettent pas de construire des accord agréables, car elles sont trop fausses par rapport à ce qu'elle devraient être idéalement. En particulier, "les tierces de la gamme de Pythagore sont désagréables, sonnent faux"! Or les tierces sont précisément à la base de la musique polyphonique...

2.3 Le tempérament égal standard (à "octaves justes")

On étudiera ensuite quel doit être le rapport de fréquence correspondant à une quinte *modifiée* (légèrement fausse), de sorte qu'après 12 de ces quintes consécutives, on retombe exactement sur la note de départ (c'est à dire dans la même classe d'octaves). Ce rapport définit le tempérament égal (à *octaves justes*, par construction). On étudiera alors la qualité des intervalles ainsi obtenus (quintes, quartes, tierces,...), en les comparant aux mêmes intervalles de la gamme pythagoricienne, pour constater que les battements résiduels restent cette fois, dans les pires cas, parfaitement "acceptables", justifiant ainsi pourquoi le tempéramment égal a finalement été universellement adopté dans la musique occidentale, fondamentalement basé sur les accords.

On déterminera de même le rapport de fréquences entre 2 notes consécutives dans la gamme ainsi obtenue (notes rangées par hauteurs croissantes). Ce rapport caractérise le *1/2 ton* (chromatique), qui est le plus petit intervalle de la gamme de 12 notes.

2.4 Le tempérament égal à quintes justes (TEQJ): quintes justes + classes d'octaves modifiées

Dans le tempérament égal standard, les octaves sont parfaitement justes (i.e. $f_{do_{i+1}} = 2\, f_{do_i}$, etc.). Or si l'octave est un intervalle important, la quinte l'est tout autant, particulièrement en musique polyphonique, et rien sinon l'habitude ne justifie qu'on ait choisi de favoriser la justesse de l'octave plutôt que de la quinte. C'est ainsi pour cette raison que Serge Cordier a imaginé et inventé vers la fin du vingtième siècle un nouveau tempérament égal, appelé *tempérament égal à quintes justes* (TEQJ), qui rend les quintes justes... mais corrélativement, les octaves légèrement fausses.

Un cycle contenant 12 quintes et couvrant 7 octaves, on déterminera quel doit être le rapport de fréquences correspondant à un intervalle d'*octave modifiée* de telle sorte que *7 de ces octaves modifiées successives* conduisent au même résultat que *12 quintes exactes successives*. On déterminera également, de même que pour le tempérament égal standard, le rapport de fréquences pour un 1/2 ton obtenu selon ce processus.

On comparera enfin la qualité (en termes de battements) des intervalles de la gamme du TEQJ avec ceux de la gamme du TE standard.

2.5 Tentative de comparaison *objective* des deux tempéraments au moyen de statistiques en "aveugle"

Dans un deuxième temps, il s'agira d'apprécier la différence entre justesse mathématique (objective) et justesse apparente (a priori subjective), c'est à dire ce que perçoivent l'oreille et le cerveau et qui n'est pas nécessairement conforme à la justesse mathématique. Quelques expériences acoustiques permettront aux élèves de se familiariser avec cette différence. Dans le même temps, un protocole expérimental basé sur des statistiques *en aveugle* sera défini, de manière à réaliser concrètement, dans un troisième temps, la collecte de mesures de la justesse *subjective,* perçue par un ensemble d'auditeurs (musiciens de préférence, mais pas nécessairement), dont le nombre devra être suffisant pour que l'expérience puisse être statistiquement significative.

Il s'agira enfin de réaliser l'étude statistique proprement dite des résultats, de façon rigoureuse, selon les méthodes adaptées, permettant de répondre objectivement à la question: *le TEQJ donne-t-il une "impression de justesse d'octaves" supérieure au tempérament classique?*, ce avec un taux de confiance bien maîtrisé. Il s'agira en fait de tester tout d'abord l'hypothèse (en vue de la rejeter) H_0: *le TEQJ et le tempérament classique sont équivalents concernant la justesse des octaves.* Puis, si le test conduit à rejeter cette hypothèse, de tester l'hypothèse H_1: *le TEQJ est meilleur*, ce qui conduira alors, si la réponse est positive, à établir mathématiquement la supériorité du TEQJ. Dans le cas contraire, la réponse sera néanmoins utile, notamment pour aller plus loin en proposant un tempérament égal intermédiaire entre les deux.

Cette partie sera davantage détaillée dans un futur séminaire.

3 Annexe: description sommaire du projet

Toute la musique occidentale actuelle est basée sur le *tempérament égal*: on désigne par ce terme la manière dont sont définies les notes à partir d'une référence appelée diapason. De façon lapidaire, il s'agit de diviser l'octave en 12 parties exactement égales, de sorte que, la fréquence obtenue après 12 notes consécutives soit 2 fois la fréquence de la note de départ (soit une octave au-dessus).

Le tempérament égal est le meilleur compromis qui ait été trouvé au cours des siècles permettant de concilier à la fois une bonne proximité mélodique avec les notes "naturelles" de la gamme pythagoricienne et des intervalles de sons simultanés suffisamment proches de ceux de la gamme de Zarlino, destiné à la réalisation d'accords. Ce compromis permet en particulier d'utiliser toutes les tonalités, offrant ainsi la plus grande liberté dans la composition musicale.

Toutefois, comme tout compromis, il n'est pas sans inconvénients et il a fallu longtemps avant que le tempérament égal finisse par être universellement adopté en dépit de quelques défauts parfois gênants. Un de ces inconvénient les plus sévères est que les intervalles de quinte et surtout de tierce sont légèrement faux. En revanche, comme tous les autres tempéraments classiques, les octaves sont parfaitement justes. Or si l'octave est un intervalle certes important, la quinte l'est tout autant et rien sinon l'habitude ne justifie qu'on ait choisi de favoriser la justesse de l'octave plutôt que de la quinte. C'est ainsi que Serge Cordier à inventé vers la fin du vingtième siècle un nouveau tempérament égal, appelé *tempérament égal à quintes justes* (TEQJ), qui rend les quintes justes... mais corrélativement, les octaves légèrement fausses.

Si la quinte juste ne pose en soi aucun problème (au contraire), en revanche, la nécessité de fausser les octaves a été reçue fraîchement dans la communauté concernée (accordeurs de pianos, luthiers, musiciens,...) et a même suscité une levée de bouclier: pour la grande majorité des gens, qui pourtant sont habitués aux intervalles faux du tempérament égal classique, il est impensable d'avoir des octaves fausses, même très peu et le TEQJ a été passé au pilori avant même d'avoir été essayé.

Pourtant, quelques praticiens l'ont essayé sans à priori et l'ont immédiatement adopté. Parmi ces personnes, on peut citer l'immense violoniste Yehudi Menuhin ou le grand organiste Jean Guillou[14]. On peut donc légitimement se poser la question: **le TEQJ est-il musicalement intéressant, voire supérieur au tempérament égal classique, ou est-ce une simple curiosité sans avenir[15]?**

C'est à cette question qu'on se propose de répondre de manière *objective* dans ce projet.

Pour cela, il faudra dans un premier temps que les élèves se familiarisent avec ces deux notions de tempérament, leurs impacts respectifs sur les intervalles de notes, en particulier sur la justesse, et diverses autres questions qui seront abordées sous un angle physique.

Dans un deuxième temps, il s'agira d'apprécier la différence entre justesse mathématique (objective) et justesse apparente, c'est à dire ce que perçoit l'oreille et le cerveau et qui n'est pas nécessairement conforme à la justesse mathématique. Quelques expériences acoustiques permettront aux élèves de se familiariser avec cette différence. Dans le même temps, un protocole expérimental basé sur des statistiques *en aveugle* sera défini, de manière à réaliser concrètement, dans un troisième temps, la collecte de mesures de la justesse *subjective,* perçue par un ensemble d'auditeurs (musiciens de préférence, mais pas nécessairement), dont le nombre devra être suffisant pour que l'expérience puisse être statistiquement significative.

Il s'agira enfin de réaliser l'étude statistique proprement dite des résultats, de façon rigoureuse, selon les méthodes adaptées, permettant de répondre objectivement à la question: *le TEQJ donne-t-il une "impression de justesse d'octaves" supérieure au tempérament classique?*, ce avec un taux de confiance bien maîtrisé. Il s'agira en fait de tester tout d'abord l'hypothèse (en vue de la rejeter) H_0: *le TEQJ et le tempérament classique sont équivalents concernant la justesse des octaves.* Puis, si le test conduit à rejeter cette hypothèse, de tester l'hypothèse H_1: *le TEQJ est meilleur*, ce qui conduira alors, si la réponse est positive, à établir mathématiquement la supériorité du TEQJ. Dans le cas contraire, la réponse sera néanmoins utile, notamment pour aller plus loin en proposant un tempérament égal intermédiaire entre les deux.

[14] L'auteur de ces lignes pratique depuis plus de 15 ans le TEQJ pour accorder son piano et pour rien au monde il ne reviendrait au tempérament égal classique!

[15] Autrement dit: la réponse négative qu'ont donnée la majorité des praticiens (sans avoir fait l'essai pour la plupart!) est-elle justifiée ou bien est-ce le poids des traditions ou la paresse intellectuelle qui l'ont motivée?