Un problème de coloriage

Le problème

On considère le problème suivant : étant donnés deux nombres naturels n et k avec $1 \leq k \leq n$, on souhaite colorier tous les nombres entiers entre 1 et n avec k couleurs différentes numérotées de 1 à k, tel que certaines conditions soient respectées. Plus précisément, on appelle *coloriage additif* de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ un coloriage tel qu'il n'existe pas de nombres $a, b, c \in \{1, \ldots, n\}$ (non nécessairement distincts) tous coloriés de la même couleur et tels que $a + b = c$. Similairement, on appelle *coloriage multiplicatif* de $\{1, \ldots, n\}$ un coloriage tel qu'il n'existe pas de nombres $a, b, c \in \{1, \ldots, n\}$ tous coloriés de la même couleur et tels que $a \times b = c$. L'objectif de ce problème est d'essayer de déterminer s'il existe de tels coloriages de $\{1, \ldots, n\}$ avec k couleurs.

Quelques exemples

Pour $n = 5$, considérons le coloriage à $k = 3$ couleurs suivant :

$$\{ \color{red}{1} , \color{blue}{2} , \color{blue}{3} , \color{red}{4} , \color{green}{5} \}$$

On peut vérifier qu'il s'agit d'un coloriage additif car aucune des solutions dans $\{1, \ldots, n\}$ de l'équation $a + b = c$ n'est monochrome. Par exemple, on a $\color{blue}{2} + \color{blue}{2} = \color{red}{4}$ ou encore $\color{red}{1} + \color{red}{4} = \color{green}{5}$. Par contre, il ne s'agit pas d'un coloriage multiplicatif. En effet, on a $\color{red}{1} \times \color{red}{4} = \color{red}{4}$.

À l'inverse, le coloriage

$$\{ \color{red}{1} , \color{blue}{2} , \color{blue}{3} , \color{green}{4} , \color{blue}{5} \}$$

est lui un coloriage multiplicatif, mais pas additif (essayez de le vérifier !).

Objectif principal

On se propose d'essayer de répondre à la question suivante :

Étant donné un entier naturel $n \geq 1$, quel est le plus petit entier $k \geq 1$ tel qu'il existe un coloriage additif de $\{1, \ldots, n\}$? Et pour un coloriage multiplicatif ?

On pourra essayer d'explorer les pistes suivantes :

- ◇ Étudier la question pour des petites valeurs de n.
- ◇ Essayer de proposer un encadrement du résultat en fonction de n.
- ◇ Proposer des méthodes pour construire un coloriage additif ou multiplicatif de $\{1, \ldots, n\}$, et essayer de le mettre en œuvre informatiquement.

Autres pistes de recherche

Dans un second temps, vous pourrez explorer une ou plusieurs des pistes de recherche suivantes au choix et expliquer que devient la réponse au problème dans les cas suivants :

- ◇ Étudier la question dans le cas dit *relâché*, où l'on suppose de plus que les entiers a, b et c vérifiant $a + b = c$ ou $a \times b = c$ sont tous distincts.
- ◇ Étudier la question pour d'autres équations, par exemple $a_1 + \cdots + a_m = a_{m+1}$ ou $a_1 \times \cdots \times a_m = a_{m+1}$. Vous pouvez également proposer d'autres équations qui vous semblent intéressantes.
- ◇ Étudier la question sur d'autres ensembles de nombres, par exemple si on se restreint aux nombres pairs ou impairs entre 1 et n, ou si on autorise les nombres négatifs ou nuls. Que peut-on dire pour des ensembles infinis de nombres comme $\mathbb{N}^*$? Vous pouvez encore une fois proposer d'autres ensembles qui vous semblent intéressants.
- ◇ Étudier la question modulo un entier p.

Vous êtes également libres (et même encouragé·es !) de proposer vos propres pistes de recherche.