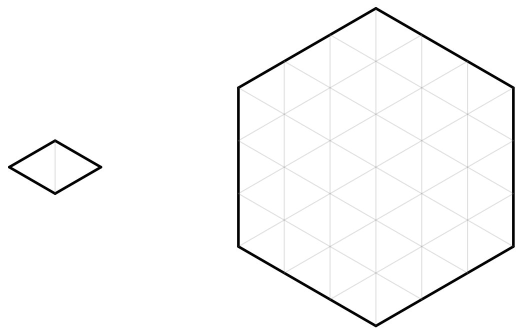
La boîte de calissons

Le problème

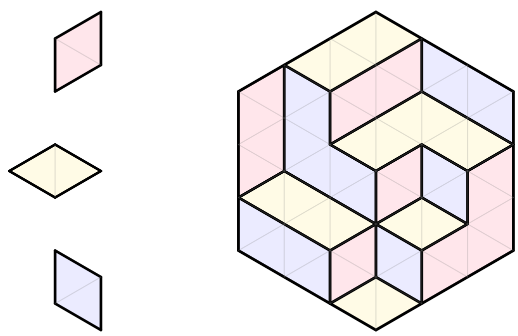
On appelle considère une boîte de forme hexagonale dans laquelle on souhaite ranger des calissons en forme de losanges. L'objectif de ce problème est de déterminer, en fonction de la taille de la boîte ainsi que d'un ensemble de contraintes sur l'intérieur de la boîte, s'il est possible de remplir la boîte de calissons, et si oui de dénombrer le nombre de remplissages différents.

Modélisation du problème

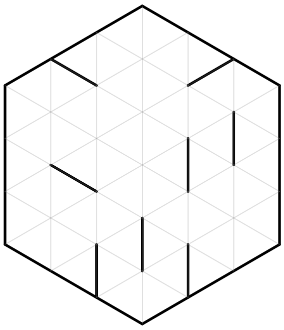
On modélise un *calisson* par une forme de losange obtenue en juxtaposant deux triangles équilatéraux de côté de longueur 1, et la *boîte* à remplir par un hexagone régulier de côté de longueur un entier $n \geq 1$. On peut alors découper la boîte avec une grille de triangles équilatéraux de côté de longueur 1. L'exemple suivant représente un calisson, ainsi qu'une boîte hexagonale de côté de longueur 3, subdivisée en triangle équilatéraux.

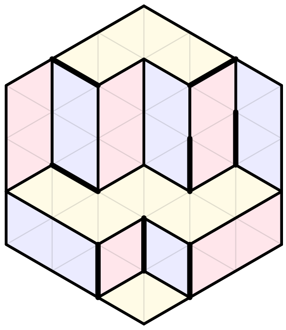


On remarque qu'en plaçant un calisson sur la grille, il y a trois orientations différentes possibles dans la boîte. On peut alors diviser notre boîte en différents *compartiments*, de telle sorte que tous les calissons d'un même compartiment aient la même orientation, et que deux compartiments qui se touchent aient des calissons d'orientations différentes. Sur l'exemple suivant, les trois orientations possibles d'un calisson sont représentées par trois couleurs différentes. Un exemple de remplissage de la boîte de taille 3 est donné ; en particulier les bordures des différents compartiments sont représentées en noir.



On peut également chercher à imposer des *contraintes* sur la disposition des compartiments dans la boîte de la manière suivante : on choisit un ensemble de segments le long de la grille à l'intérieur de la boîte et on souhaite remplir la boîte de calissons de sorte que chacun de ces segments soient contenu dans une bordure séparant deux compartiments. Dans l'exemple suivant, on a construit un remplissage de la boîte respectant les contraintes imposées par les segments.





Objectif principal

On se propose d'essayer de répondre à la question suivante :

Étant donnés une boîte hexagonale de taille n ainsi qu'un ensemble de contraintes, est-il possible de remplir la boîte en respectant ces contraintes ? Si oui, combien y a-t-il de remplissages différents possibles, et en particulier quand y a-t-il un unique remplissage de possible ?

On pourra commencer par essayer d'explorer les pistes suivantes avant d'attaquer le problème dans sa généralité :

- ◇ Étudier le cas sans contrainte : étant donnée une boîte hexagonale de taille n, combien existe-t-il de remplissages différents de la boîte en fonction de n ? Que devient la question si on ne compte pas deux fois les remplissages qui sont les mêmes à une rotation et/ou une symétrie axiale de la boîte près ? Commencer par regarder les petites valeurs de n.
- ◇ Étudier le cas où on impose un seul segment de longueur 1 comme contrainte.
- ◇ Proposer une méthode permettant, lorsque c'est possible, de remplir la boîte étant donné un ensemble de contraintes.
- ◇ Essayer de classifier les contraintes telles qu'il est impossible de remplir la boîte.

Autres pistes de recherche

Dans un second temps, vous pourrez explorer une ou plusieurs des pistes de recherche suivantes au choix et expliquer que devient la réponse au problème dans les cas suivants :

- ◇ Déterminer en fonction de n le nombre minimal de contraintes que l'on peut imposer dans une boîte de taille n tel qu'il y ait un unique remplissage possible.
- ◇ Étudier (dans le cas sans contrainte) ce qu'il se passe s'il y a des trous dans la boîte, c'est-à-dire des zones sur lesquelles on ne peut pas poser de calisson.
- ◇ Étudier d'autres formes de boîtes possibles.

Vous êtes également libres (et même encouragé·es !) de proposer vos propres pistes de recherche.