Pourquoi les gammes sont ce qu'elles sont?

Musique et mathématiques

Gérard Montseny

septembre 2019

1 Quelques notions de base

On rapelle ci-après, en vrac, quelques définitions, termes ou notions simples qui devront être bien assimilées avant d'aborder l'étude proprement dite.

- **Son** Le son est un phénomène de vibrations de l'air perçues par l'oreille (et le cerveau). Ces vibrations sont émises par une source qui met en mouvement l'air autour d'elle, puis se propagent sous forme "d'ondes acoustiques" dans l'air environnant (comme des ronds dans l'eau, mais dans toutes les directions) à la vitesse de 343 m/s avant d'atteindre l'oreille qui *à ce moment-là* "capte" le son (et le cerveau "l'entend").

- **Hauteur d'un son** Parmi l'infinité de sons que l'oreille peut entendre, on peut distinguer les sons qui sont associés (par le cerveau) à une "hauteur" (par opposition aux sons "percussifs" ou encore aux sons qu'on désigne sous le terme de "bruit" et pour lesquels aucune impression de "hauteur" n'apparaît naturellement). Ainsi, à un son de flûte, de trompette, ou encore de corde (guitare, piano,...) est de façon naturelle associée une notion de *hauteur de ce son*: une corde courte émettra un son plus aigu qu'une corde longue. Parmi les sons qu'on peut associer à une hauteur bien définie, les plus "parfaits" sont les sons *entretenus* (ou continus), comme les sons émis par un tuyau sonore (flûte). Outre leur hauteur bien définie et aisément identifiable, de tels sons semblent "stationnaires" dans le temps (du moins le temps où le son est émis). Ils sont évidemment à la base de la construction des "notes", et ce sont donc ceux qui nous intéressent ici.

- **Fréquence d'un son (entretenu)** Pour un son de hauteur bien définie, c'est à dire "entretenu" au moins pendant un temps suffisamment long pour que le cerveau puisse sans ambiguïté y associer une hauteur, il est possible de définir la notion de "fréquence" (de ce son): il s'agit du *nombre de vibrations par secondes* que capte le typan qui reçoit ce son (on n'approfondira pas davantage cette définition). Il se trouve que la hauteur perçue est directement liée à cette fréquence: un son "grave" correspond à une fréquence basse, un son aigu à une fréquence élevée. L'unité de mesure de la fréquence est le Hertz (Hz); 1 Hz signifie: 1 vibration par seconde.

  Une oreille humaine standard peut entendre des sons graves à partir d'une fréquence aux alentours de 20 Hz, et des sons aigus jusqu'à 20 kHz[1].

  Attention: ce qui vient d'être dit concerne les sons suffisamment "purs"; un son de très basse fréquence peut néanmoins continuer à être perçu lorsqu'il est "riche en harmoniques" (aigües). Cependant, sa hauteur (en tant que "note" n'est alors plus vraiment définie: on entend plutôt un bruit, comme par exemple le moteur d'une moto, dont la fréquence du son émis peut être de quelques Hz seulement). On ne précisera pas davantage ces notions ici.

  Les "note" de musiques seront ainsi associées à des fréquences particulières: *c'est la notion de fréquence qui permet d'aborder l'étude des gammes par la voie des mathématiques*!

- **Battement** Il s'agit là d'une notion très importante dans le cadre de cette étude! Lorsque deux sons entretenus de fréquences *assez voisines* sont entendus simultanément, on perçoit une variation plus ou moins rapide de la force (ou amplitude) du son résultant. Cela découle du fait que les deux sons n'étant pas à la même fréquence, les variation de pression (sur le tympan!) ne sont pas synchronisées et tantôt se renforcent (lorsqu'elles vont "dans le même sens"), tantôt s'affaiblissent (lorsqu'elles vont "en sens contraire"). Cette variation plus ou moins rapide de l'amplitude du

[1] Pour des jeunes! Car avec l'âge, l'acuité auditive diminue: à 60 ans, on ne perçoit en général plus les sons au-delà de 15 kHz, voire moins; mais cela n'empêche en rien d'écouter de la musique, les sons les plus importants pour la musique se situant entre 60 Hz et 4 kHz.

son résultant s'appelle un *battement*. La fréquence de ce battement est égale à la *différence des fréquences* des deux sons ainsi superposés.

Lorsque ces battement sont très lents (c'està dire lorsque les deux sons ont des fréquences très voisines), ils paraissent "naturels", voire agréables, en donnant une impression de stabilité et de plénitude sonore. Lorsqu'ils ont une fréquence de l'ordre de quelques Hertz, ils sont au contraire perçus comme moins agréables (voire désagréables), au sens ou les deux sons sont clairement séparés tout en étant voisins: le résultats est plus agressif, donnant l'impression de deux sons mal assortis ou "désaccordés". C'est là le point central qui a conduit les musiciens et les facteurs d'instruments de musique à définir une "bonne" manière d'accorder leurs instruments.

Mais des battement apparaissent aussi avec deux notes de fréquences très différentes (et avec les mêmes propriétés concernant la "qualité" du son résultant), lorsque celles-ci sont assez voisines de deux fréquences dans un rapport arithmétique simple. Précisons les choses.

Supposons un mélange de deux sons de fréquences respectives f_1 et f_2 telles que $\frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{2}$. Le résultat sera perçu comme un nouveau son très stable (cela provient du fait que f_1 et f_2 sonts toutes deux *multiple entier* d'une même fréquence $f_0 = \frac{f_1}{2} = \frac{f_2}{3}$, ce qui entraîne un *synchronisme* entre les deux sons). Si maintenant on considère le mélange de deux sons de fréquences respectives f_1 et $f_2' = f_2 + \varepsilon$ (avec ε petit devant f_2), alors le résultat fera entendre un battement du fait que $\frac{f_1}{f_2'}$ est à la fois *voisin et différent* de $\frac{3}{2}$. On aurait la même chose en considérant les rapports 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$ etc. (pour des rapports plus complexes, plus grands que 2 ou plus petits que $\frac{1}{2}$, ces battements s'estompent peu à peu).

C'est la recherche de battements les plus lents possibles (voire nuls!) qui gouverne la construction des notes de musique[2] !

- **Intervalle entre deux sons de hauteurs différentes** Lorsqu'on mélange deux sons de fréquences différentes, l'oreille humaine entend ces deux sons distinctement. Cependant, lorsque ces fréquences sont dans un rapport arithmétique simple, une grande *stabilité* du son résultant apparaît. Cette stabilité a un effet psychoacoustique très attractif, tout particulièrement pour les rapports les plus simples: 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$. Un tel mélange stable (ou suffisamment stable) de deux sons dans un rapport de fréquence simple prend en musique le nom d'*intervalle*.

  Les différents types d'intervales rencontrés en musique ont chacun un nom dont l'origine n'est pas directement liée au rapport de fréquence, mais à la distance séparant les deux notes correspondantes, selon l'ordre fixée, de longue date, par la gamme "naturelle[3]". Ceci est décrit ci-après pour les principaux intervalles qu'on aura à prendre en compte dans cette étude.

- **Octave (intervalle)** L'intervalle d'octave correspond à un rapport de fréquences égal à (ou "suffisamment voisin" de) **2**, soit: $\frac{f_1}{f_2} \simeq 2$. Dans ce cas, le mélange est tellement "parfait" qu'on a l'impression qu'il s'agit deux deux notes "équivalentes", au sens où ells diffèrent seulement par leur hauteur, mais produisent "quasiment" le même "effet au plan mélodique"; à tel point que de façon universelle, on donnera le même nom à deux telles notes: une octave est ainsi l'intervalle qui sépare deux *do* différents et consécutifs. Il y a bien 8 notes entre ces deux *do*, d'où le nom d'octave donné à un tel intervalle.

  C'est le mélange le plus stable[4] (avec l'intervalle tivial d'*unisson*, qui correspond à un rapport de fréquences égal à 1: $f_1 = f_2$).

- **Classes d'octaves, notes** En réitérant, à partir d'une fréquence f_1 (choisie a priori), l'intervale d'octave, vers les sons aigus aussi bien que vers les sont graves, on obtient un ensemble de sons qui sont tous "équivalents" au sens mélodique. Cet ensemble (qui, mathématiquement, est une "classe d'équivalence") s'appelle encore une *note* (mais cette fois en tant que classe). Lorsqu'on parle de *ré*, par exemple, sans préciser davantage, on fera ainsi référence à n'importe quel *ré* de cet ensemble, puisqu'ils sont tous équivalents.

  L'ensemble de ces "classes d'octaves" est alors l'ensembles des (noms de) notes disponibles pour constituer des mélodies. Ainsi, dans la *gamme* diatonique habituelle, on dispose de 7 notes: *do, ré, mi, fa,sol,la,si* (qui sont traditionnellement rangées par ordre de hauteur croissante).

[2] Et donc également l'accord des instruments.
[3] C'est-à-dire la succession des notes: *do, ré, mi, fa,sol,la,si,do.*
[4] Il est tellement stable, qu'il n'a finalement, en soi, que peu d'intérêt au plan musical!

Bien évidemment, les mélodies sont néanmoins construites en faisant la distinction entre les notes de même nom mais de hauteurs différentes! Les différentes notes du même nom seront en pratique notées, lorsque c'est nécessaire, au moyen d'un indice, par exemple: $ré_1$, $ré_2$, etc., de sorte que le rapport de fréquences entre $ré_2$ et $ré_1$ soit égal à 2:

$$\frac{f_{ré_{i+1}}}{f_{ré_i}} = 2,\ i = 1, 2, 3, ...$$

- **Octave (segment de fréquences)** Le terme octave désigne indifférement, selon le contexte, non seulement un intervalle (en tant que mélange de sons entretenus), mais également (c'est le poids des traditions!) tout segment de fréquences de la forme $[f,\ 2f]$. Ainsi, une octave pourra également désigner tout groupe de notes dont les fréquences sont toutes à l'intérieur d'un tel segment[5]. En conséquence, les rapports de fréquences entre deux notes d'une même octave seront toujours compris entre 1 et 2.

  Pour bien distinguer ces deux notions, on notera *Octave* (avec majuscule) tout segment $[f, 2f]$.

  Le rapport de fréquences entre deux notes d'une même Octave est toujours un nombre compris entre 1 et 2.

- **Quinte** Après l'octave qui est l'intervalle non trivial le plus "consonant", on trouve la *quinte*, intervalle essentiel car il va porter à lui seul, une fois la notion de classe d'octaves bien comprise, la construction de toutes les notes utilisables (et utilisées!), ce de manière quasi universelle. La construction des notes à partir du seul intervalle de quinte conduit à la gamme dite *pythagoricienne* (du nom du célèbre géomètre grec de l'antiquité, qui ne s'est pas contenté d'inventer son théorème!).

  L'intervalle de quinte correspond au rapport de fréquences le plus simple après 2, c'est à dire **3**, et donc, *en considérant, par équivalence d'octave, les notes à l'intérieur d'une même Octave* (c'est à dire pour des rapports compris entre 1 et 2), au rapport de fréquences $\frac{3}{2}$. Il se trouve que, selon l'ordre des notes rangées par hauteurs croissantes, une quinte correspond à un écart de 5 notes (par exemple *do-sol* ou *ré-la*), d'où le nom donné traditionnellement à cet intervalle.

  L'intervalle de quinte est d'une stabilité et d'une douceur extrême, tout en mettant en mélange deux notes résolument non équivalentes du point de vue mélodique. En ce sens, la quinte a exercé de tout temps et en tout lieu une fascination indéniable et une attraction esthétique puissante chaque fois que les hommes ont pu consruire des instruments capables de produire plus d'un son à la fois (tout particulièrement des instruments à cordes, du fait que la hauteur des sons produits est alors facile à ajuster, simplement en réglant la tension des cordes).

  Ainsi, dès lors qu'on peut régler à volonté les fréquence f_1 et f_2, on vérifie aisément que lorsque le rapport avoisine $\frac{3}{2}$, il surgit un "ilôt de stabilité attractive", qui conduit tout naturellement à "accorder en quinte" (en recherchant la stabilité maximum par un *battement quasi nul*); ce même pour des oreilles non exercées!

- **Quarte** L'intervalle de Quarte n'est autre qu'un intervalle de quinte... à une octave près[6]. Précisons cela en considérant la succession de notes dans une même Octave: do_1*, ré, mi, fa,sol,la,si,*do_2. L'intervalle do_1*-sol* étant une quinte, par équivalence des deux *do*, l'intervalle[7] *sol-*do_2 semblerait devoir l'être également. Mais puisque $f_{do_2} = 2\ f_{do_1}$, le rapport des fréquences entre ces deux notes est alors

$$\frac{f_{do_2}}{f_{sol}} = 2\frac{f_{do_1}}{f_{sol}} = \frac{2}{\frac{f_{sol}}{f_{do_1}}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

  On appelle quarte tout intervalle dont le rapport de fréquences est égal à (ou très voisin de) $\frac{4}{3}$; quatre notes séparent deux notes distantes d'une quarte, d'où le nom donné à cet intervalle. Ainsi, *do-fa*, *ré-la*, etc sont des quartes.

  Du point de vue de la construction des notes, quinte et quarte sont des intervalles équivalents (puisqu'à une octave près pour l'une des deux, les notes sont équivalentes: $do_1 \Leftrightarrow do_2 \Longrightarrow do_1$*-sol* $\Leftrightarrow$ *sol-*do_2*).* L'intervalle de quarte est, comme la quinte, d'une grande douceur.

[5] Par exemple, un groupe de 12 notes consécutives sur le clvier d'un piano sera appelé octave.

[6] Dans le jargon musical, on dit que la quarte est le *renversement* de la quinte.

[7] On range les notes par ordre de hauteurs croissantes.

La quarte sera utilisée en remplacement de la quinte lorsque cet intervalle conduirait à quitter l'Octave considérée. Ainsi, par quintes/quartes successives, on va pouvoir construire de façon naturelle et mécanique, toutes les notes d'une même Octave, en particulier les notes dites "diatoniques" (toutes séparées d'une quinte dans cette suite): *fa,do,sol,ré,la,mi,si*, mais également, en poursuivant le processus, les "dièses" et "bémols": *si,fa♯,do♯,sol♯,...*[8]).

- **Tierce** Après la quinte (et la quarte), l'intervalle le plus consonant est la *tierce*[9]. Il est associé au nombre (premier) **5**[10] et correspond, du point de vue du rapport de fréquences ramenées par équivalence à une même Octave, au rapport $\frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{4}$ et à une distance de 3 notes (par exemple *do-mi* ou *fa-la*[11]), d'où le nom donné à cet intervalle. Les curiosités de l'arithmétique ont ainsi conduit à attribuer le nom de quinte au rapport de fréquences faisant intervenir le nombre 3, et de tierce au rapport de fréquences faisant intervenir le nombre 5: on fera attention à éviter les confusions!

  Si l'intervalle de quinte est indéniablement à la base de la musique "mélodique", on peut dire de même que c'est la tierce qui constitue le fondement de la musique *polyphonique*, c'est à dire faisant entendre des *accords*, constitués du mélange d'au moins trois sons simultanés.

  En outre, si la quinte est un intervalle stable, reposant, se suffisant à lui-même, la tierce (du fait que le rapport des fréquences est "moins simple") crée au contraire une ambiance moins stable et donc plus "expressive".

- **Autres intervalles** Bien d'autres intervalles possibles apparaissent à mesure qu'on construit les notes d'une même Octave. Leurs rapports de fréquences seront toujours *plus ou moins voisins* de combinaisons arithmétiques simple *idéales* faisant intervenir les seuls nombres 2, 3 et 5. On reviendra sur ce point important le moment venu.

- **Mode, gamme** Une fois choisi un ensemble de notes (les classes d'octaves!) ainsi construites, on peut disposer ces notes sous forme d'une suite de hauteurs croissantes au sein d'une même Octave. C'est ainsi qu'a été obtenue la *gamme* traditionnelle diatonique[12]: *do, ré, mi, fa,sol, la, si, do.*

  Mais il est tout aussi possible de "démarrer" par exemple avec la note *ré*, ce qui donne alors une autre gamme (constituée des mêmes notes, mais organisées différemment): *ré, mi, fa,sol, la, si, do, ré*, et on peut faire de même à partir de n'importe laquelle des notes de cet ensemble. A chacune de ces gammes correspond un *mode*.

  Le mode reflète simplement la manière dont on privilégie une note particulière, à savoir la première et la dernière (qui est la même que la première, une octave au-dessus) de la gamme, note qui prend alors une place prépondérante dans les mélodies construites selon ce mode. Cette note particulière est appelé *fondamentale* ou *tonique*. Bien que ce soient toujours les mêmes notes utilisées, du fait que la tonique est une note privilégiée, elle impose par sa présence une certaine "ambiance", qui sera très différente d'un mode à l'autre.

  La notion de mode ne sera pas importante dans le cadre de cette étude.

- **Diapason** On appelle *diapason* une note (c'est à dire une fréquence f_0) particulière, choisie par convention comme "point de départ" pour la construction de toutes les autres notes. Ainsi, le diapason actuel de la musique occidentale est le la_3, de fréquence 440 Hz.

  On peut sans restriction changer le diapason : les notes construites seront alors de fréquences différentes, mais les rapports de fréquences, fixés par le processus de construction des notes, restent quant à eux inchangés.

---

[8] Il ne restera plus ensuite qu'à "ranger" ces notes par ordre de hauteurs croissantes pour obtenir la gamme *chromatique* complète.

[9] Il s'agit ici de tierce dite *majeure*.

[10] Le nombre 4 étant égal à 2×2, il est à nouveau associé à l'intervalle d'octave.

[11] Attention: il s'agit ici de tierces *majeures*. D'autres intervalle comme *ré-fa* ou *mi-sol* sont des tierces mineures, qui correspondent à un autre rapport de fréquences. On ne les considérera pas dans cette étude.

[12] On fait référence à ces notes dans un souci pédagogique, de manière à illustrer ce propos introductif par des exemples concrets. Dans l'étude proprement dite, on ne fera en revanche aucune référence à des notions déjà connues, l'objectif étant de construire les notes de musique à partir de la seule expérience auditive.

2 Travail à effectuer

Dans un premier temps, les élèves devront bien se familiariser avec les diverses notions "abstraites" introduites dans la section précédente.

2.1 L'outil de base : le battement

Le travail des élèves consistera, dans un premier temps, à bien étudier, puis définir ce qui constitue la base de ce projet, à savoir un *outillage conceptuel*, basé sur la notion de fréquence d'un son et à partir duquel on sera en mesure de qualifier comme objectivement "agréable" ou "désagréable" le mélange de deux sons. Le côté agréable se traduira en fait pas la *stabilité* du mélange, c'est à dire la *lenteur du battement*. Des expériences acoustiques permettront de donner à cette première partie une assise concrète indispensable, tout en exhibant (et discutant) l'aspect "universel" de cette idée de "mélange agréable"[13].

Pour les élèves suffisamment armés au plan mathématique (lycée), on s'attachera en premier lieu à étudier par la voie mathématique[14] le phénomène de battement. Pour cela, on partira de la définition d'un son *périodique* (archétype d'un son dont la hauteur est bien définie):

Dfinition 1 *Une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique s'il existe $T > 0$ tel que:*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t+T) = g(t);$$

*on appelle **période** de g le plus petit T tel que cette propriété soit vérifiée.*

Par abus, on appelera également période un "morceau" de cette fonction g, défini par sa restriction à un intervalle de temps de longueur la période: $[t_0, t_0 + T]$. Cela correspond, dans notre étude, à *une vibration élémentaire* du son g. On montrera en particulier que la fréquence d'une telle fonction g est alors l'inverse de la période.

On étudiera ensuite le phénomène de battement en considérant le son (fonction) $g = g_1 + g_2$ obtenu par addition de deux sons périodiques $g_1$et g_2 de fréquences f_1 et f_2 différentes.

Au plan physique, il sera bon de se munir de quelques outils:

- piano ou synthétiseur électronique, guitare, etc, tout instrument capable de faire entendre plus d'un son à la fois, de manière à exercer l'oreille sur l'écoute de ces battements
- fréquencemètre (facile à trouver parmi les applications dédiées aux téléphones portables), qui permettra de confirmer par des mesures physiques ce que les élèves entendent
- ordinateur permettant de "synthétiser" des sons entretenus ainsi que de mélanger deux de ces sons, de manière à entendre ce que donnent les divers réglages des paramètres du son
- ...

Il s'agira ensuite de se doter d'un (puis de plusieurs) "monocorde(s)", c'est à dire d'un instrument constitué d'une seule corde dont on pourra faire varier à volonté la hauteur du son émis. Concrètement, ce monocorde pourra être matérialisé par exemple par une guitare, ainsi que par un petit programme convenable sur un ordinateur. L'objectif étant de disposer d'un instrument (réel ou virtuel) vierge qu'on va ensuite "accorder" selon le principe précédemment défini, en considérant qu'*on ignore tout de la musique*.

Au bout de ce travail de défrichage, les élèves seront capables de bien comprendre et décrire, tant au plan mathématique qu'acoustique, ce qu'est un mélange "agréable" de deux sons de fréquences différentes (qu'il s'agisse de sons synthétisés ou de sons naturels). Ils seront ainsi dans la situation d'un homme de l'antiquité qui découvre ce phénomène de "mélange agréable"... et va s'en servir pour accorder sa lyre qu'il vient juste d'inventer.

[13] C'est en effet cette "universalité" qui fait que les notes qu'on trouve partout et à toutes les époques sont quasiment toujours et au moins en grande partie un sous-ensemble plus ou moins grand d'un même ensemble (excepté pour certaines musiques plus "rudimentaires" où il n'a jamais été besoin de mélanger les sons entre eux).

[14] Il ne s'agira pas de rechercher la rigueur absolue, mais plutôt de définir et d'analyser ces phénomènes au moyen des outils mathématiques au sens le plus large (y compris de simples dessins ou, bien sûr, d'un ordinateur).

2.2 Monodie: nécessité et suffisance de la quinte - Construction "universelle" des gammes mélodiques

Une fois armés de l'*outil du battement* et de leurs *monocordes*, les élèves pourront alors étudier comment se construisent naturellement les notes de proche en proche (à partir d'une première note de référence, le *diapason*, choisie arbitrairement), simplement en se basant sur le rapport de fréquences non trivial *le plus stable* (en ce sens le plus "agréable"), qui est 3/2, c'est à dire la *quinte*.

Ils découvriront lors de cette phase comment diverses gammes de la musique sont obtenues, en limitant le processus à un nombre réduit d'étapes, jusqu'à l'obtention des notes diatoniques. Les différents modes possibles obtenus avec ces notes seront considérés. Puis, en poursuivant ce processus de proche en proche, on complètera la gamme jusqu'aux 12 notes chromatiques, fermant ainsi le "cycle des quintes".

2.3 Vers la polyphonie : invention des *accords* - prépondérance de la tierce - gamme de Zarlino

On s'intéressera ensuite à l'intervalle de tierce, pour constater qu'avec les notes précédemment construites (sur la base des seules quintes), sa stabilité est totalement insuffisante: "les tierces de la gamme de Pythagore sont désagréables, sonnent faux"! Ce qui amènera naturellement les élèves à introduire le rapport 5/4 qui permet d'avoir des tierces parfaites, et finalement à une nouvelle gamme, à la fois proche au plan mélodique de la gamme de Pythagore, et pourtant très différente au plan harmonique: la gamme de Zarlino, qui permet à la fois les constructions mélodiques comme la gamme de Pythagore, mais également d'accompagner ces mélodies avec quelques accords. C'est là le point de départ de la musique polyphonique.

2.4 Limites de la gamme de Zarlino : les tempéraments - découverte du tempérament égal

Enfin, on étudiera les limites de la gamme de Zarlino et le travail se poursuivra par une réflexion sur ce que devrait être une gamme *idéale*, qui n'existe pas (on cherchera pourquoi!) mais dont on cherchera à se rapprocher de la "meilleure manière possible", ce qui mènera tout naturellement, grâce au raisonnement mathématique, au tempérament égal... ainsi qu'à bien d'autres questions que les élèves se poseront

3 Annexe: description sommaire du projet

"*La musique est l'art de combiner les sons d'une manière agréable à l'oreille*": cette définition quelque peu désuette de la musique présente l'avantage de la simplicité... et en même temps n'est pas tout à fait inexacte! Elle réunit en outre des mots-clés essentiels dans le cadre de cette étude: tout d'abord le *son*, qui est évidemment le matériau de base pour la musique (quelle qu'elle soit), puis *combiner* ces sons, c'est à dire les associer et/ou les mélanger (de la manière qu'on voudra), et enfin *agréable*, terme essentiel s'agissant d'art, mais très subjectif et dont on va dans cette étude donner une définition certes réductrice, mais précise et objective, qui servira de point de départ.

Les styles de musique sont extrêmement variés, en fonction des lieux et des époques. Dans le cas de musiques "mélodiques", c'est à dire faisant entendre des sons dont la hauteur est bien définie (contrairement aux sons purement percussifs), il apparaît toutefois, de manière assez inattendue, que les *gammes* utilisées (c'est à dire les ensembles des notes sélectionnées pour la construction de mélodies) sont quasiment toujours constituées de notes communes, pour toutes les époques et toutes les cultures. Ainsi par exemple, des mélodies traditionnelles chinoises peuvent être jouées (au moins pour l'essentiel) sur un piano, ce qui aurait été hautement improbable si le choix de notes avait été effectué de façon arbitraire, du seul fait du hasard. On peut alors se poser la question: pourquoi ces notes particulières sont-elles toujours et en tout lieu quasi systématiquement choisies, alors qu'a priori rien ne l'impose?

Le but de cette étude est de proposer une réponse (aussi convaincante que possible!) à cette question. L'objectif est de montrer par une analyse rigoureuse qu'à partir d'un simple "postulat" définissant de façon objective ce que doit vérifier un mélange de deux sons *stables* et de hauteurs différentes[15] pour être "agréable", on est naturellement conduit, de proche en proche, à sélectionner un ensemble de *notes* particulières parmi l'infinité de notes possibles à priori. Or il se trouve qu'une telle sélection est gouvernée par des rapports arithmétiques simples concernant les *fréquences*[16] des sons. Les diverses gammes rencontrées dans le monde de la musique en sont quasiment toujours un sous-ensemble: elles sont plus ou moins riches en notes selon les lieux, les époques et les styles, mais elles ont toujours un socle de notes en commun. Et qu'ainsi, cet aspect "universel" de la musique est une conséquence obligée d'une propriété intrinsèque à l'Homme (celle de trouver agréables certains mélanges de deux sons)... et des lois de l'arithmétique.

On ira plus loin dans l'analyse en étudiant le cas particulier de la musique occidentale dite *tonale* (en opposition aux autres musiques "mélodiques", dites *modales*) et dont l'originalité, unique dans l'histoire de la musique, réside essentiellement en l'exploitation intensive de l'intervalle de *tierce*, conduisant à des *accords* (groupes d'au moins 3 notes jouées ensemble). Or, de façon lapidaire, si la musique modale (où les accords n'existent pas sinon à l'état embryonnaire) est basée sur les notes engendrées par l'arithmétique des seuls nombres 2 et 3 (selon un procédé décrit dans une première partie), il se trouve (pour des raisons qui seront bien détaillées) que l'introduction de l'intervalle de tierce en tant que mélange de sons *simultanés* nécessite l'intervention du nombre 5 (outre 2 et 3). Faute de quoi, des phénomènes de battements "désagréables" (au sens de la définition précédemment mentionnée) subsistent et les tierces (et à fortiori les accords) en question demeurent inutilisables en tant que mélange... tout en n'étant manifestement pas si éloignées que cela d'une "tierce agréable", mais qui nécessiterait de "fausser légèrement" une des deux notes[17]: il apparaît alors un dilemme *presque* inextricable qui, du point de vue arithmétique, provient du simple fait que $\frac{3^n}{2^m} \neq \frac{5^{n'}}{2^{m'}}$ quels que soient les nombres *entiers* non nuls n, m, n', m'. Cette intervention (inconsciente à l'époque) du nombre 5 conduit finalement à une construction plus subtile de la gamme, appelée gamme de Zarlino (ou parfois gamme naturelle).

Autrement dit, la situation se complique sérieusement dès qu'on veut faire de la musique *polyphonique*! Mais les difficultés inhérentes à la polyphonie ne s'arrêtent pas là: dès lors que l'on souhaite pouvoir utiliser un *maximum* d'accords (en plus de mélodies!), à cause de tels "conflits arithmétiques", au moins certaines des notes de la gamme complète (de 12 notes) doivent être *convenablement* modifiées, le compromis devant permettre une différence quasi imperceptible au plan mélodique[18], mais en même temps suffisamment

[15] Par exemple deux cordes d'une lyre pincées ensemble. Ainsi, pour accorder une lyre, on peut imaginer accorder les cordes deux par deux, de sorte que chaque couple étant bien accordé, l'ensemble "sonne bien" également.

[16] La fréquence d'un son auquel on peut associer une hauteur, comme une corde vibrante, est le nombre de vibrations par seconde.

[17] C'est cette proximité qui a probablement poussé les musiciens à explorer la voie des "tierces", associée au nombre 5.

[18] Du seul point de vue mélodique, la gamme Pythagoricienne, basée sur les seuls nombres 2 et 3, conserve toujours son universalité!

significative en ce qui concerne les mélanges simultanés de notes, de sorte que de nombreux accords soient "agréables" (ou du moins acceptables[19]). C'est ce qu'on appelle le *tempérament*. Un *gamme tempérée* est une gamme dont les notes sont légèrement altérées par rapport aux notes "naturelles", *de manière à rendre utilisables* (c'est-à-dire *pas désagréables*!) *un maximum d'accords*[20].

Au cours des trois derniers siècles, un tempérament particulier a fini, peu à peu, par s'imposer définitivement (malgré les nombreuses polémiques parfois violentes qu'il a suscitées auprès des musiciens et des théoriciens!), du fait qu'il permettait de rendre toutes les tonalités "équivalentes" et de ce fait autorisait la plus grande liberté dans la composition musicale: c'est le *tempérament égal* (ou plus simplement et abusivement: *gamme tempérée*), qui est universellement utilisé de nos jours. Mathématiquement, il est très simple à définir mais nécessite l'intervention du nombre non rationnel $\sqrt[12]{2}$ (on en expliquera la raison). Du point de vue de l'arithmétique, en comparaison avec la construction de la gamme "universelle" de Pythagore (utilisée dès l'antiquité), ce tempérament consiste simplement à remplacer le nombre "naturel" $3/2 = 1.5$ par le nombre $(\sqrt[12]{2})^7 = 1.498...$ C'est cette différence minuscule qui permet de concilier à la fois une bonne "tenue mélodique" des notes ainsi construites, du fait de leur proximité avec les notes de la gamme pythagoricienne, et une qualité acceptable[21] des accords construits avec ces mêmes notes, ce que la gamme pythagoricienne, en revanche, ne permettait absolument pas[22].

Le travail des élèves consistera, dans un premier temps, à bien étudier, puis définir ce qui constitue la base de ce projet, à savoir un *critère objectif*, basé sur la notion de fréquence d'un son (qui devra évidemment être introduite en préliminaire) et qui permettra de qualifier comme "agréable" ou "désagréable" le mélange de deux sons. Le côté agréable se traduira en fait pas la *stabilité* du mélange: l'oreille et le cerveau humains perçoivent en effet très facilement cette stabilité qui présente indéniablement un caractère attractif puissant, même pour des oreilles non exercées. Quelques expériences acoustiques (qui sont à définir) permettront de donner à cette première partie une assise concrète indispensable.

Une fois armés de cet outil, les élèves pourront alors étudier comment se construisent les notes de proche en proche (à partir d'une note de référence fixée au départ), simplement en se basant sur le rapport de fréquences non trivial *le plus stable* (en ce sens le plus "agréable"), qui est 3/2. Ils découvriront lors de cette phase comment diverses gammes de la musique sont obtenues, en limitant le processus à un nombre réduit d'étapes, jusqu'à l'obtention des notes diatoniques standard (c'est à dire l'ensemble bien connu: {do, ré, mi, fa, sol, la, si}). Les différents modes possibles obtenus avec ces notes seront considérés. Puis, en poursuivant ce processus de proche en proche, on complètera la gamme jusqu'aux 12 notes chromatiques, fermant ainsi le "cycle des quintes" (incluant les touches noires du piano).

On s'intéressera ensuite à la stabilité d'un nouvel intervalle (la tierce), pour constater qu'elle ne peut être obtenue au moyen des seules notes précédemment construites, ce qui amènera naturellement les élèves à introduire le rapport 5/4 (apparition du nombre 5) et finalement à la gamme de Zarlino.

Enfin, le travail se poursuivra par une réflexion sur ce que devrait être une gamme idéale, ce qui mènera tout naturellement, grâce au raisonnement mathématique, au tempérament égal... ainsi qu'à bien d'autres questions que les élèves se poseront...

[19] Grâce à la tolérence de l'oreille humaine, il a été possible d'arriver à de "bons" compromis du fait qu'il existe des nombres n, m, n', m' "pas trop grands", tels que $\frac{3^n}{2^m} \simeq \frac{5^{n'}}{2^{m'}}$; mais il s'en est fallu de peu pour que la musique polyphonique ne puisse exister!

[20] Bien que tout cela paraisse aujourd'hui parfaitement naturel, il s'agit d'une invention remarquable, presque miraculeuse tant la fenêtre était étroite: la question du choix du bon tempérament à suscité de violents conflits à une époque pas si lointaine.

[21] Mais on est très proche de la limite tolérable pour l'oreille humaine! En effet, il a fallu attendre longtemps pour que, l'habitude aidant, les musiciens finissent par accepter (voire apprécier) les défauts de ce nouveau tempérament. De nos jours, on ne se pose même plus la question car on ne s'en aperçoit tout simplement pas: sans le savoir, les gens "pratiquent" le tempérament égal depuis leur naissance!

[22] Les tierces, en particulier, sont trop fausses. La gamme de Zarlino, initialement construite pour obtenir des tierces correctes, ne permet néanmoins que quelques rares bons accords et s'avère trop terne du point de vue mélodique à cause d'erreurs trop importantes par rapport à la gamme pythagoricienne.