

Le petit poucet et ses frères

Cet article est le résultat d'un travail mené dans le cadre d'un atelier MATH.en.JEANS par des élèves du Lycée Ernest Bichat de Lunéville durant l'année scolaire 2012-2013.

Liste des élèves : Philippe - Pierre ARNOULD ; Marion DUFOUR ; Kaoutar EL IDRISSE ; Sylvain LUCAS ; Pierre ROYER.

Professeurs : Geneviève BOUVART ; Christine FABRY.

Chercheur : André STEF.

L'histoire du Petit Poucet est connue de tous : Poucet est le plus jeune, le septième, le petit dernier de la famille. L'ainé avait dix ans tandis que Poucet n'en avait que sept.

« On s'étonnera que le bûcheron ait eu tant d'enfants en si peu de temps ; mais c'est que sa femme allait vite en besogne, et n'en faisait pas moins de deux à la fois. » Perrault, *Le petit Poucet*.

Dans quel ordre la mère de Poucet a-t-elle engendré Poucet et ses frères sachant qu'ils viennent au monde au moins avec un autre frère jumeau ?

Résultat : $F_n = U_n + 1$ où F_n est le n-ième terme de la suite de Fibonacci et U_n le nombre de partitions possibles d'enfants d'une famille comportant n enfants.

Le conte nous impose donc deux conditions : Tous les enfants ne peuvent pas naître d'un seul coup et ils ne peuvent pas arriver seuls, il faut qu'il y en ait au moins deux à chaque naissance. L'ordre des naissances est aussi pris en compte : Par exemple une famille composée de jumeaux puis de triplés est différente d'une famille composée de triplés puis de jumeaux.

D'abord nous allons chercher toutes les répartitions possibles dans la famille de Poucet, c'est-à-dire pour le cas de sept enfants :

Voici le tableau récapitulant toutes les décompositions pour sept naissances :

1 ^{ère} naissance	2 ^{ème} naissance	3 ^{ème} naissance
5	2	
4	3	
3	4	
3	2	2
2	5	
2	3	2
2	2	3

Nous pouvons donc constater qu'il y a 7 possibilités différentes de répartir les naissances.

Nous allons maintenant nous intéresser à d'autres nombres d'enfants.

On pose n le nombre d'enfants

Les cas pour 1, 2 et 3 enfants ne sont pas envisageables d'après les contraintes posées par Perrault : un enfant ne peut pas arriver seul et il y a nécessairement deux enfants d'âges différents.

Si nous considérons le cas de quatre enfants, il n'existe qu'une seule possibilité de répartition : deux naissances de jumeaux.

En ce qui concerne cinq enfants, nous nous rendons compte que l'ordre des naissances importe. En effet, il existe deux possibilités de répartition : des triplés **puis** des jumeaux ou alors des jumeaux **puis** des triplés.

Enfin, pour n=6, le nombre de possibilités de répartitions atteint le nombre de quatre : des quadruplés puis des jumeaux (et inversement), deux naissances de triplés, ou trois naissances de jumeaux.

Par abus de langage, nous utiliserons le mot « portée » pour désigner une naissance multiple.

I. Une technique de dénombrement

Nous avons, après avoir effectué les premières décompositions, cherché une technique qui nous permettrait de dénombrer de manière ordonnée et efficace les naissances, tout en étant certain de n'en oublier aucune.

Pour créer des partitions de deux portées, on commence par le nombre maximal d'enfants à la première portée, c'est-à-dire $(n-2)$, auquel on fait ensuite suivre le nombre d'enfants de cette portée pour obtenir une nouvelle partition. On continue ainsi à créer des partitions en diminuant de 1 le nombre d'enfants de la première portée, unité que l'on rajoutera à la deuxième portée.

(nombre d'enfants de la première portée) +
(nombre d'enfants de la deuxième portée)
 $(n-k) + k$ avec $k \geq 2$

Exemple : $(n-2) + 2$
 $(n-3) + 3$
 $(n-4) + 4$

Lorsqu'une portée peut elle-même être décomposée, on la considère de manière indépendante et on applique le même principe : $(n-k) + k$: Si k peut être décomposé, nous allons créer de nouvelles portées secondaires.

Par exemple, avec $k=5$, nous obtenons deux partitions : $(n-5) + 5$ et $(n-5) + 3 + 2$

Or nous prenons en compte l'ordre des naissances. On effectue alors des permutations avec les portées. Dans l'exemple précédent, nous obtenons alors, non pas deux mais trois partitions car $(n-5) + 2 + 3$ est différente des autres.

Il est possible d'agir de même lorsqu'une portée secondaire peut elle-même être décomposée.

II. Encore plus de résultats !

Tableau des résultats

Soit n le nombre d'enfants, U_n le nombre de partitions possibles et $U_{n+1}-U_n$ la différence du nombre de partitions entre $n+1$ et n enfants

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
U_n	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143
$U_{n+1}-U_n$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	

III. Vers des conjectures ?

1. conjecture 1 des différences

D'après ces valeurs (3ème ligne du tableau), nous pouvons nous demander s'il y a un lien entre celle-ci. Nous avons ainsi proposé une première conjecture :

$$[U_{n+2} - U_{n+1}] = [U_{n+1} - U_n] + [U_n - U_{n-1}]$$

et ainsi

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= U_{n+1} + [U_{n+1} - U_n] + [U_n - U_{n-1}] \\ &= 2 U_{n+1} - U_{n-1} \end{aligned}$$

Nous pouvons reprendre le tableau de valeurs afin de vérifier :

n	4	5	6	7	8	9
U_n	1	2	4	7	12	20
$U_{n+1}-U_n$	1	2	3	5	8	13

Vérification :

Prenons $U_9 = U_{n+2}$, $U_8 = U_{n+1}$ et donc $U_7 = U_n$

$$U_7 - U_6 = 7 - 4 = 3$$

$$U_8 - U_7 = 12 - 7 = 5$$

$U_8 + [U_7 - U_6] + [U_8 - U_7] = 12 + 3 + 5 = 20$. Nous retrouvons bien la valeur de U_9 établie à l'aide de la technique de dénombrement précédemment énoncée soit 20 partitions possibles.

2. Conjecture 2 : une suite de Fibonacci ?

Puis nous avons identifié, avec la deuxième ligne du tableau, une deuxième conjecture afin de prévoir le nombre de partitions pour n enfants.

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n + 1$$

Soit le nombre d'enfants au rang $n+2$ est égal à celui du rang n plus celui du rang $n+1$ plus 1.

Vérification :

Prenons $U_9 = U_{n+2}$, $U_8 = U_{n+1}$ et donc $U_7 = U_n$

$$U_9 = 12+7+1 = 20$$

Comme précédemment avec la première conjecture, nous retrouvons le résultat pour $n=9$

Remarquons que la deuxième conjecture implique la première (si on établit la deuxième, alors on prouve aussi la première)

A partir de cette conjecture 2, nous avons pu établir un algorithme nous permettant de déterminer le nombre de partitions d'enfants pour tout n .

On pose les 3 désignations de départ :

$$U_{n+2} = C$$

$$U_{n+1} = B$$

$$U_n = A$$

L'algorithme affiche ainsi le nombre de partitions au rang n choisi soit le nombre U_n .

```
DEBUT
PROMPT n
1 → A
2 → B
FOR (I ; 1 ; (n-4) )
A+B+1 → C
B → A
C → B
END
DISP : « Enfants » = n
      « Possibilités » = A
```

IV. Etude détaillée pour établir la conjecture 2

1. Toutes les partitions possibles pour 8 enfants (en tenant compte de l'ordre des naissances)

6 + 2	3 + 2 + 3
5 + 3	2 + 6
4 + 4	2 + 4 + 2
4 + 2 + 2	2 + 3 + 3
3 + 5	2 + 2 + 4
3 + 3 + 2	2 + 2 + 2 + 2

au total 12 partitions possibles

2. Toutes les partitions possibles pour 9 enfants (en tenant compte de l'ordre)

7 + 2			
6 + 3	4 + 3 + 2	3 + 2 + 4	2 + 3 + 4
5 + 4	4 + 2 + 3	3 + 2 + 2 + 2	2 + 3 + 2 + 2
5 + 2 + 2	3 + 6	2 + 7	2 + 2 + 5
4 + 5	3 + 4 + 2	2 + 5 + 2	2 + 2 + 3 + 2
	3 + 3 + 3	2 + 4 + 3	2 + 2 + 2 + 3

au total 20 partitions possibles

3. On étudie enfin le cas pour 10 enfants :

	2 + 3 + 5	2 + 2 + 4 + 2
2 + 6 + 2	2 + 3 + 3 + 2	2 + 2 + 3 + 3
2 + 5 + 3	2 + 3 + 2 + 3	2 + 2 + 2 + 4
2 + 4 + 4	2 + 2 + + 6	2 + 2 + 2 + 2 + 2
2 + 4 + 2 + 2		

On constate que lorsque les partitions commencent une portée de jumeaux au 1er rang, on retrouve exactement toutes les partitions données pour 8 enfants qui suivent cette première portée de jumeaux.

Il manquerait cependant une partition de 2 naissances admettant à la 2^{ème} portée 8 enfants d'un seul.

La partition $\{+1\}$: 2 + 8

On passe ensuite aux partitions commençant par des portées de 3 enfants :

3 + 7	3 + 3 + 2 + 2	4 + 6
3 + 5 + 2	3 + 2 + 5	4 + 4 + 2
3 + 4 + 3	3 + 2 + 2 + 3 + 2	4 + 3 + 3
3 + 3 + 4	3 + 2 + 2 + 3	4 + 2 + 4

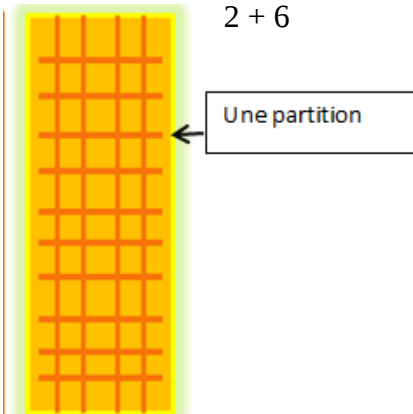
4 + 2 + 2 + 2	6 + 4
5 + 5	6 + 2 + 2
5 + 3 + 2	7 + 3
5 + 2 + 3	8 + 2

10 = 1 + 9, on pourrait donc écrire toutes les partitions pour 9 enfants puis placer avant celles-ci une naissance avec un 1 enfant : interdit par la répartition ; on ajoute donc cet enfant à la première portée de chaque partition de 9 enfants.

V. Généralisation

1. Toutes les partitions possibles pour n enfants (en tenant compte de l'ordre des naissances) illustration ci dessous avec $n=8$

6 + 2	3 + 5	2 + 4 + 2
5 + 3	3 + 3 + 2	2 + 3 + 3
4 + 4	3 + 2 + 3	2 + 2 + 4
	2 + 6	2 + 2 + 2 + 2



Pour n enfants :

Nombre de partitions différentes : $U(n)$

4 + 2 + 2
au total 12 partitions possibles

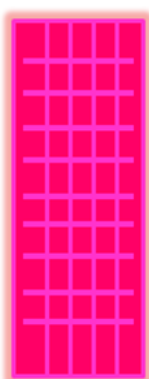
2. Toutes les partitions possibles pour (n+1) enfants (en tenant compte de l'ordre) ici $n=8$

7 + 2	2 + 3 + 4
6 + 3	2 + 3 + 2 + 2
5 + 4	2 + 2 + 5
5 + 2 + 2	2 + 2 + 3 + 2
4 + 5	2 + 2 + 2 + 3

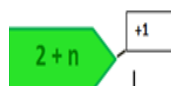
3 + 2 + 4	
3 + 2 + 2 + 2	4 + 3 + 2
2 + 7	4 + 2 + 3
2 + 5 + 2	3 + 6
2 + 4 + 3	3 + 4 + 2
	3 + 3 + 3

Pour n+1 enfants :

Nombre de partitions différentes : $U(n+1)$



Il manquerait cependant une partition



de 2 naissances admettant deux enfants à la première portée et les n enfants à la $2^{\text{ème}}$ portée.

La partition {+1} : 2 + 8

3. On étudie enfin le cas pour (n+2) enfants :

On distingue ainsi les partitions où la première portée est de 2 enfants (il y en a $U_n + 1$) et celles où il y a au moins 3 (il y en a U_{n+1})

En réécrivant cette démarche, on parvient donc à :

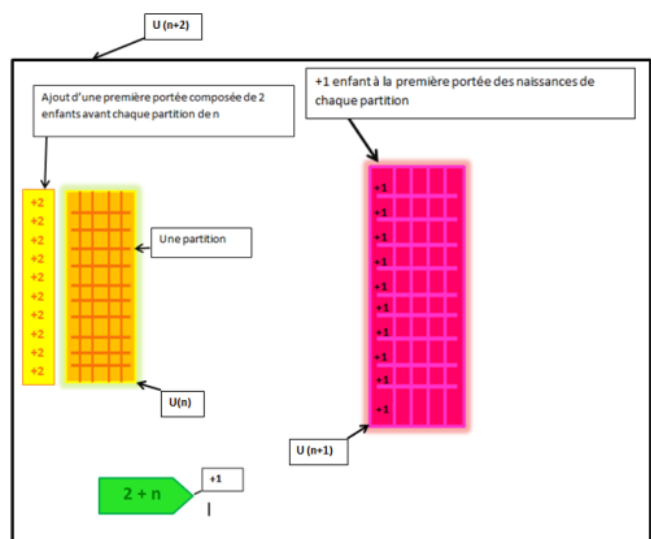
$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n + 1$$

$$\text{On pose } F_n = U_n + 1$$

$$F_{n+2} - 1 = [F_{n+1} - 1] + [F_n - 1] + 1$$

Soit donc la suite de Fibonacci

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$



On constate que Fibonacci a aussi travaillé sur cette question d'évolution de population suite aux naissances, avec un problème de lapin qu'il a posé ainsi :

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur.

Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

Maintenant, il reste à savoir si Perrault faisait volontairement des mathématiques en écrivant ses comptes pour les enfants ...