

LES PARTS DE PIZZA : UN JEU DE STRATÉGIE

1 Introduction

Vous voilà invité à dîner chez une amie. Un peu tête en l'air, vous arrivez très en retard. Pris de remords, vous décidez d'acheter une pizza. Votre amie, un peu distraite elle aussi, coupe la pizza en faisant des parts très inégales. Votre amie prend la première part, vous prenez une part adjacente à celle qu'elle vient de manger et ainsi de suite. Vous vous réjouissez à l'idée que vous allez manger plus de la moitié de cette savoureuse pizza avec un peu de réflexion. Est-ce bien vrai ?

Voici comment formaliser un peu les choses :

Alice et Bob se partagent une pizza pour le dîner. La pizza est déjà découpée (suivant certains rayons) et ils prennent une part à tour de rôle suivant la règle suivante : Alice prend une première part librement ; ensuite, seule une part incidente à des parts déjà mangées peut être choisie.

On s'intéresse à la proportion minimale de pizza qu'Alice est sûre de pouvoir manger quel que soit la stratégie de Bob et le découpage initial de la pizza. Ce problème a été énoncé en 2008 par Peter Winkler, professeur de mathématiques et d'informatique aux Etats-Unis. Winkler donne un exemple de pizza dont Alice ne pouvait manger que $4/9$ et il conjecturait que cette configuration était la pire pour Alice. Sa conjecture vient d'être démontrée :

Pour tout découpage, il existe une stratégie permettant à Alice de manger au moins $4/9$ de la pizza.

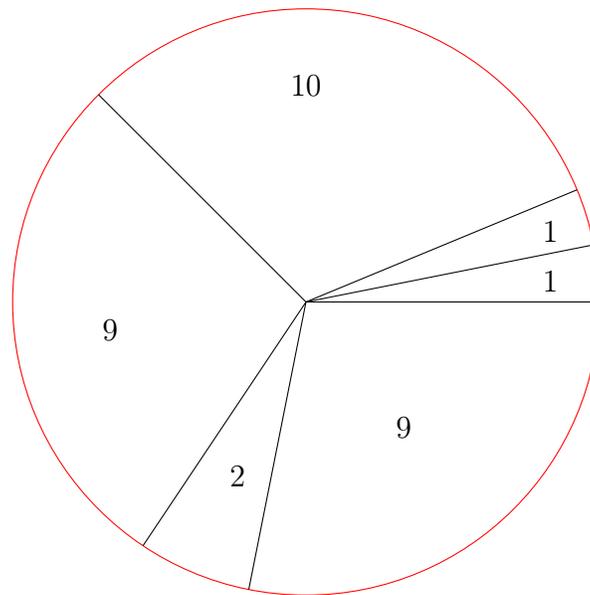
La difficulté est évidemment que le théorème est vrai pour TOUT découpage. Pour certains découpages particuliers, on peut faire mieux bien entendu. Si une part fait plus de la moitié de la pizza, Alice choisissant en premier est sûre de manger au moins une demi pizza.

C'est sur ce problème qu'on va travailler en essayant de mettre au point des stratégies. Obtenir la proportion $4/9$ est difficile. Si on remplace ce nombre par $1/3$, c'est nettement plus simple mais bien intéressant tout de même.

2 La stratégie gloutonne

Le terme glouton est la traduction de l'anglais *greedy*. On parle d'algorithme glouton ou de stratégie gloutonne en informatique théorique quand on choisit à chaque étape la stratégie qui maximise le profit immédiat. Ici, Alice choisit à son tour la plus grande part possible. On pourrait penser que c'est une bonne stratégie ... et bien non !

Voici un exemple. On pourra vérifier que la stratégie gloutonne permet à Alice de manger $13/32$ de la pizza ce qui est bien peu.



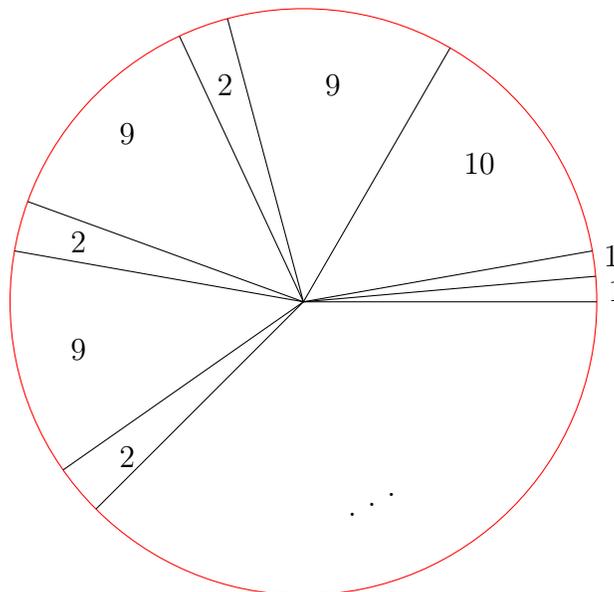
Stratégie gloutonne. Les valeurs donnent la proportion de chaque secteur. Par exemple 10 signifie que le secteur a pour proportion $\frac{10}{1+1+10+9+2+9} = \frac{10}{32}$ de la pizza.

On peut montrer un résultat plus fort en modifiant l'exemple :

La stratégie gloutonne ne permet pas de garantir qu'Alice mangera une proportion fixée de la pizza. Cela signifie qu'on peut découper la pizza de telle façon que si Alice suit la stratégie gloutonne, elle mangera arbitrairement peu de pizza.

C'est bizarre n'est ce pas ?

Essayer de le prouver. On pourra par exemple s'inspirer du dessin ci-dessous où il y a une part de taille 10, k parts de taille 2, $k + 1$ parts de tailles 9 et 2 parts de taille 1. En remplaçant 9 par ℓ quelconque, on arrive à la conclusion cherchée. Ce n'est très certainement pas la seule situation où l'algorithme glouton est très mauvais. On pourra en chercher d'autres.



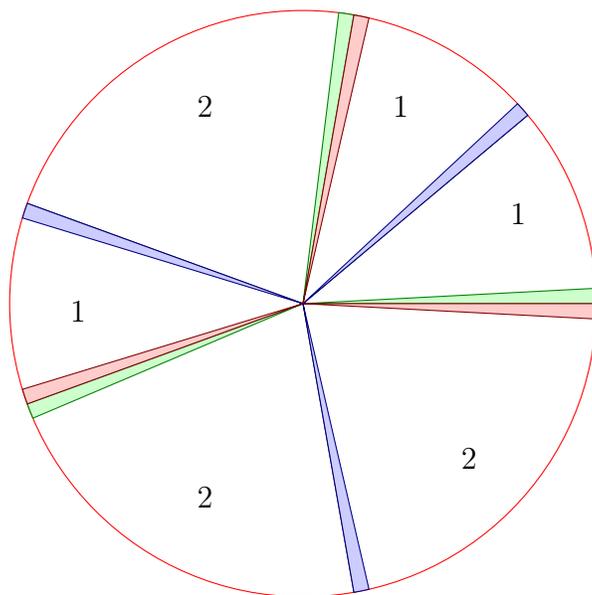
Variante

3 Pizzas paires et impaires

On pourrait croire que lorsque le nombre de parts de pizza est impair, Alice mange une part de plus que Bob et donc que la proportion de pizza qu'elle va manger est d'autant plus grande. Encore une fois, notre intuition nous joue des tours.

Lorsque le nombre de parts de pizza est pair, Alice a toujours une stratégie pour manger au moins la moitié de la pizza.

Ce résultat est simple à démontrer. Par contre, dans l'exemple de Winkler, quelque soit le morceau de pizza qu'Alice choisit en premier, Bob a toujours une stratégie pour manger $5/9$ de la pizza de Winkler. Essayez de vous en convaincre avec le dessin ci-dessous.



Exemple de Winkler¹

On pourra enfin essayer de chercher à construire des stratégies qui permettent à Alice de manger une bonne partie de la pizza dans le cas d'une pizza "impaire" (par exemple, au moins $1/3$ de la pizza).

1. Les petits secteurs colorés sont de taille négligeable par rapport aux autres (on peut les choisir arbitrairement petits), on ne les fera pas intervenir dans les calculs d'aire. Les nombres donnent les rapports d'aire.