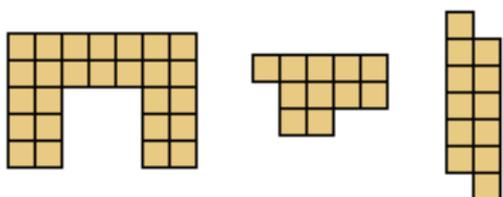


Pavages avec des dominos ou des rectangles

Jean-Paul Delahaye

On dispose d'une boîte de dominos et de diverses figures composées de carrés collés les uns aux autres par leurs côtés. Exemples :



On voudrait savoir quelles sont les figures de ce type qu'on peut recouvrir exactement par des dominos (sans dépasser de la figure, sans que deux dominos recouvrent la même case, sans qu'il reste des cases vides). On parle de figures "pavables" par des dominos.

Question 1.

Etudiez le cas où la forme est un carré de k unités de côté pour $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$

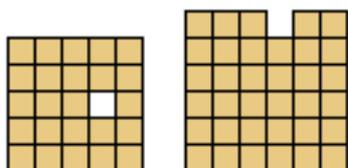
Donnez une règle générale.

Il faut justifier sa réponse (par un dessin ou un argument).

Même chose avec un rectangle de côté k et l .

Question 2.

Etudiez le cas où la forme est un carré de k unités dont on a découpé une case. Exemples :



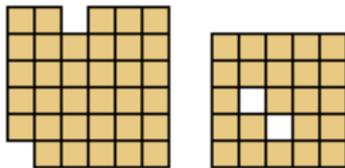
Envisagez tous les cas possibles. Donnez une règle générale qui indique quand c'est possible, et quand c'est impossible.

Il faut justifier les réponses.

Question 3

Même question avec un carré dont on a coupé deux cases.

Exemple :



Attention, ce n'est pas seulement une question de nombres pairs ou impairs. Il faut justifier les réponses.

Question 4

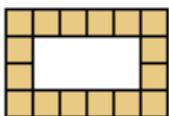
Même question avec un carré dont on a coupé trois cases.

Question 5

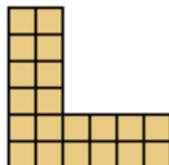
Envisagez des familles de figures (à définir vous-mêmes) et donnez des règles (en les justifiant) indiquant quand une figure de cette famille est pavable par des dominos.

Exemples de familles à envisager (mais il faut en imaginer d'autres) :

(a) Figures «bord d'un rectangle», comme :



(b) Figure en forme de L d'épaisseur 2 (ou 3, etc.), comme :



Question 6

Réfléchissez à la question :

Un rectangle de côté a et b (a et b des entiers) est donné. On cherche à le paver avec des rectangles plus petits de côté c et d (c et d des entiers). Quand cela est-il possible ?

Exemple : Est-ce que le rectangle de forme 6×15 est pavable par des rectangles de forme 9×2 ?

Traitez des cas particuliers.

Essayez de trouver des familles de cas où la réponse est oui, et des familles de cas où la réponse est non.

Trouvez des conditions nécessaires, des conditions suffisantes, si possible une condition nécessaire et suffisante générale.

Question 7

On s'intéresse au problème de savoir de combien de façons différentes une figure (composée de carrés comme précédemment) peut être pavée par des dominos.

- (a) Trouver des situations où il n'y a qu'un seul pavage possible.
- (b) Trouver des situations où il y a exactement 2 pavages possibles.
- (c) Trouver des situations où il y a exactement n pavages possibles (n un entier).

Faire le dessin pour $n = 2015$.