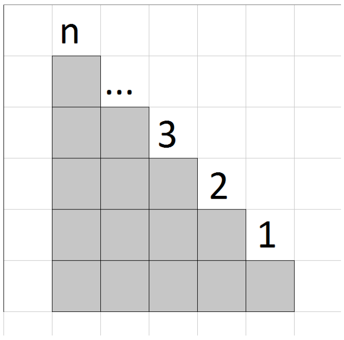
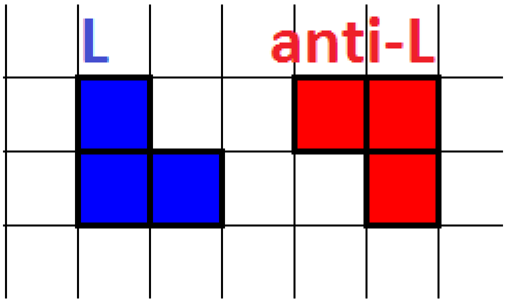
Article sur le pavage en L

Équipe du lycée Victor et Hélène Basch, Rennes :
Guo Alice, Stalin Hugo, Godbillot Faustine
Encadrés par le chercheur Vincent Guirardel et Mme Chrystèle Caret, professeur de mathématiques.

I. *Présentation*

Notre problème nous a été présenté par le chercheur Vincent Girardel :
Il s'agissait de « paver » un polygone Δn en escalier de n colonnes et de n lignes avec des blocs « L » ou « anti-L ». Il nous était impossible de les tourner, ils se présentaient donc toujours ainsi :





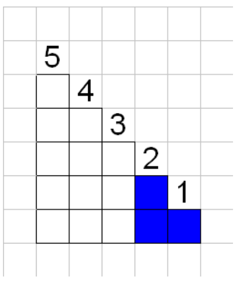
Notre objectif était de comprendre le mécanisme du pavage en L et ainsi de savoir quels Δn sont pavables ou non.

Les questions secondaires étudiées étaient :

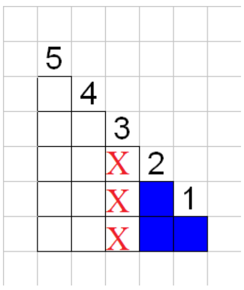
- Y a-t-il une infinité de Δn pavables ?
- Y a-t-il une infinité de Δn non-pavables ?
- Que se passe-t-il pour n = 5, 6, 7,8, 10, 11, 12, 13... 100, 101, 102... 2012, 2013, 2014, 2015, 2016... ?

Nous avons donc commencé par paver les plus petits Δn :

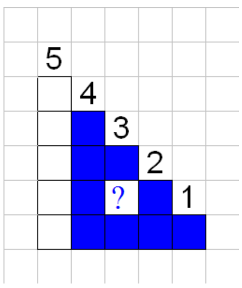
Δ2



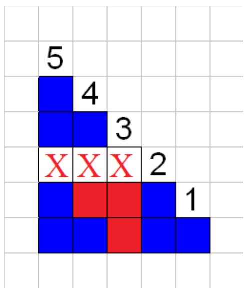
Δ3



Δ4



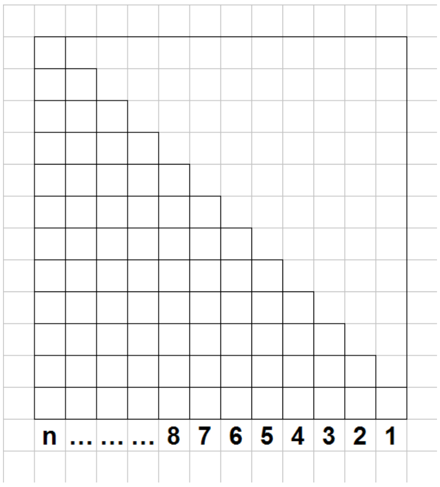
Δ5



II. *1ère règle : L'aire*

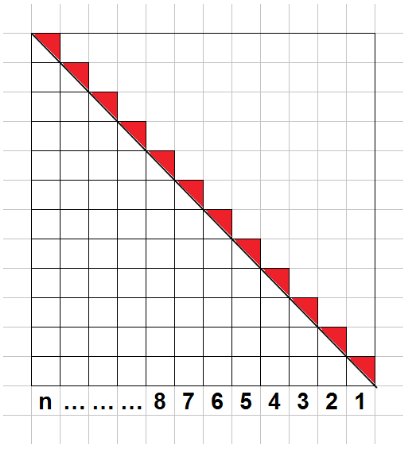
En essayant de paver Δ4, nous avons découvert une première règle pour la pavabilité ou la non-pavabilité des différents Δn :
L'aire totale du Δn doit être remplissable par des blocs « L » ou « anti-L » de trois cases ; l'aire totale de Δn doit donc être divisible par 3.

Nous avons calculé l'aire de Δn ainsi :



Nous avons d'abord vu que l'aire du carré de côté n était de n^2 :

Nous l'avons divisé par 2, ce qui donne une aire de $n^2/2$; il ne nous reste que des moitiés de n carreaux :



Il y a n moitiés de carreaux, donc n/2 carreaux en plus ; l'aire totale est donc de $(n^2+n)/2$.

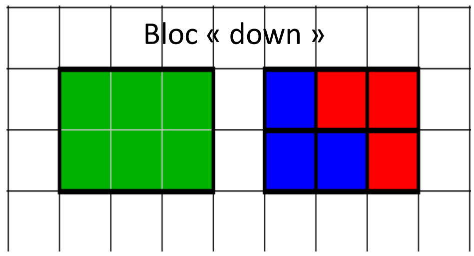
Nous vérifions que cette aire est divisible par 3 ; pour simplifier les vérifications, nous vérifions que $(n^2+n)/6$ est entier.

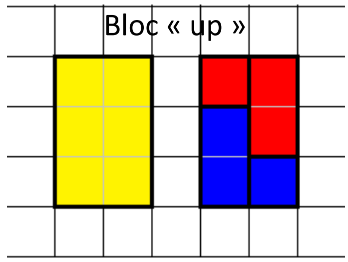
Cette règle élimine donc Δ1, Δ4, Δ7, Δ10, Δ13...
Nous avons supposé que tous les Δ(3k+1) avec k appartenant à $\mathbb{N}$ sont éliminés par cette règle.

III. *2ème règle : l'addition de Δn*

a) Colonnes d'up & down

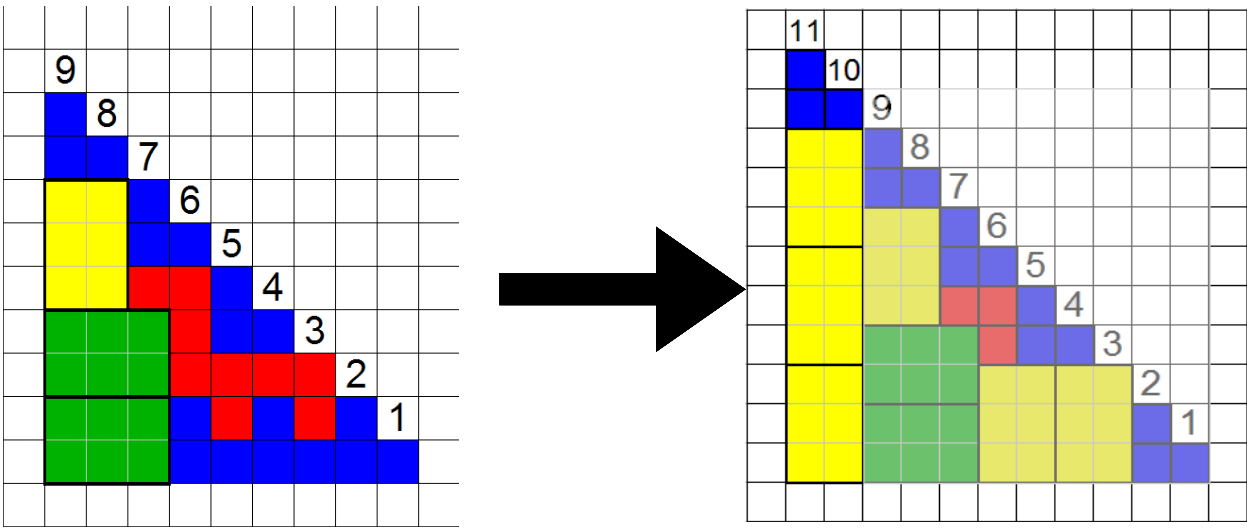
Pour simplifier le pavage, nous avons créé des blocs « up » et des blocs « down ».





Après Δ2, le premier pavable est Δ9.

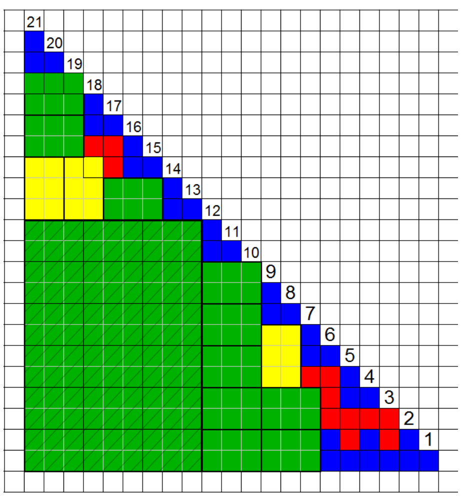
Nous avons pu ajouter au Δ9 une colonne de blocs « up », ou bien une colonne de blocs « down », créant ainsi Δ11 et Δ12 pavables.



a) Additions de Δn

Nous avons ensuite trouvé une autre technique de pavage : en ajoutant Δn et Δn' bout à bout, nous créons un rectangle vide. Si celui-ci a un côté divisible par 2 et un autre par 3, alors ce carré peut être rempli par des blocs « up » ou « down ».

Il faut aussi que les deux Δn de base soient pavables, et n doit être divisible par 2 ou 3 (si n est divisible par 2, alors n' doit être divisible par 3).



Les premiers Δn pavables divisibles peuvent donc être : Δ2, Δ9 et Δ12.
Nous pouvons donc paver Δ2+9, Δ12+2, Δ12+9, d'où Δ12+2+9 ou Δ12+11...

IV. La base de 12

Lorsque nous avons mis tous nos résultats dans un tableau, nous nous sommes rendus compte qu'il y avait un schéma récurrent.

+11

Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P?	X	√	?	X	?	?	X	?	√	X	√	√	X	√	?	X	?	?	X

Δ	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	...
P?	?	√	X	√	√	X	√	?	X	?	?	X	?	√	X	√	√	X	√	...

+2

+9

Ce schéma se répétait tous les 12 Δ. En effet, le 12 étant multiple de 2 ET de 3, tous ses multiples sont pavables en répétant la règle d'addition le nombre de fois souhaité ; tous les Δ12k+m avec k appartenant à ℕ et m appartenant à {2,9,11} sont donc pavables.
Nous avons remarqué que cette répétition correspondait à la base de 12 :

+11

B12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	10	11	12	13	14	15	16	17
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P?	X	√	?	X	?	?	X	?	√	X	√	√	X	√	?	X	?	?	X

B12	18	19	1a	1b	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2a	2b	30	31	32	...
Δ	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	...
P?	?	√	X	√	√	X	√	?	X	?	?	X	?	√	X	√	√	X	√	...

+2

+9

En effet, on peut voir dans la première ligne de ce tableau qu'en se basant sur une base à 12 chiffres (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b), 12k+x finira toujours par le nombre x. Ainsi, nus pouvons plus aisément voir quels nombres sont des Δ12+{2,9,11}, en l’occurrence dans la base de 12 des Δ12+{2,9,b}.

Conclusion :

Nous avons finalement réussi à résoudre deux tiers du problème posé. Les Δ12k + {0,2,9,11} sont pavables et les Δ12k + {1,4,7,10} ne sont pas pavables. Néanmoins le dernier tiers demandant encore de nombreuses heures de recherche, nous n'avons pas été en mesure de démontrer si les Δ12k + {3,5,6,8} sont pavables ou non. Nous pouvons tout du moins conjecturer qu'ils ne le sont pas car Δ3, Δ5, Δ6 et Δ8 ne sont pas pavables. Un chercheur nous a conseillé de nous pencher sur la piste des couleurs ! (affaire à suivre...)