

1 Les cruches

Voici deux cruches, l'une de 5L et l'autre de 7L. Vous pouvez les remplir à la fontaine, les vider, les transvaser autant de fois que vous voulez.

Votre défi. Comment faire pour obtenir exactement 1L d'eau dans l'une des cruches ?

L'eau est précieuse. On joue mais sans rien gaspiller ; on utilise donc un réservoir où on puise l'eau et où on reverse l'excédent quand on n'en a plus besoin. Quelle est la taille minimale du réservoir pour pouvoir résoudre le problème ?



2 Billard

Mozart était un grand passionné de billard¹. Pouvez vous aider Wolfgang ?



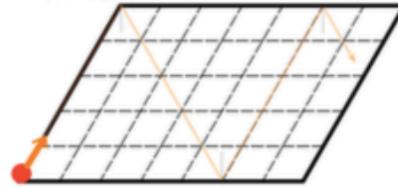
On pose deux boules sur le tapis.

1. Dans quelle direction doit-il envoyer la première boule pour qu'elle touche la seconde après avoir fait exactement un seul rebond au bord ?
2. Que faire si on veut exactement deux rebonds ?
3. Y a-t-il plusieurs solutions ? Comment les trouver toutes ?

3 Le billard de Monsieur Bézout

Le billard de Monsieur Bézout a la forme ci-contre : il fait $7\text{m} \times 5\text{m}$, avec un angle de 60° au coin. La boule peut glisser le long du bord. Par contre, quand elle heurte un nouveau bord, elle se réfléchit selon la règle naturelle du billard.

Complétez la trajectoire ci-contre. Pourquoi passe-t-on toujours par des points du quadrillage ?



Est-ce que la trajectoire atteint le point $(0, 1)$ lors d'un rebond ? Pouvez vous faire le lien entre ce problème et celui des cruches ?

Que se passe-t-il si on était parti dans la direction horizontale ? Pouvez vous en déduire deux solutions distinctes au problème des cruches ?

A l'aide de ce billard, pouvez vous trouver des nombres entiers x et y tels que $5x + 7y = 1$?

On continue la trajectoire après avoir atteint $(0, 1)$. Est-ce qu'on traverse finalement tous les points du quadrillage ? Est-ce que la trajectoire se répète ? Quelle est la longueur du cycle ? La longueur dépend-elle du point de départ ? de la direction initiale (en partant parallèle aux bords) ?

Que se passe-t-il si au lieu de prendre un billard 5×7 (ou des cruches de 5L et 7L), on prend d'autres paires de nombres. Essayez par exemple avec $(3, 4)$ puis $(3, 6)$ ou $(4, 6)$. Que se passe-t-il ?

4 Encore des cruches



Cette fois, on dispose de 3 cruches. Une cruche pleine de 8L et deux cruches vides de 3L et 5L et malheureusement, on n'a plus accès à la fontaine.

Votre défi. Comment faire pour avoir exactement 4L dans la grande cruche et 4L dans la moyenne ?