Atelier Math en Jeans
2017–2018

UPEC	Créteil	Lingmin Liao, François Vigneron.
Collège Victor Duruy	Fontenay-sous-Bois	Coralie Mangin

1 Astérix & Cléopatre

Dans une version inédite d'Asterix & Cléopatre, notre héros gaulois doit ranger le stock du marchand de souvenirs...

Les célèbres figurines du Sphinx existent en deux versions : en plâtre ou en bois. Comme l'original millénaire est fait de pierre, Cléopatre a formellement interdit d'exposer cote à cote deux figurines en bois car cela entrainerait peut-être une terrible malédiction sur le royaume. La vitrine du marchand permet de ranger N figurines cote à cote. Combien de vitrines Asterix peut-il composer ?

Remarque : le marchand possède beaucoup plus que N figurines de chaque type dans ses caisses, en stock. Mais l'ordre de Cléopatre ne porte que pour les figurines exposées en public.

2 Le réseau social des nombres

Les nombres entiers de 00 à 99 ont décidés de créer leur réseau social, ℕbook.

Les nombres de 00 à 99 sont regroupés par classes d'amis. Lorsque des nombres sont amis, on peut les multiplier entre eux et les deux derniers chiffres de leur produit fait aussi parti de leurs amis. Tous les nombres sont-ils amis ? Sinon, pouvez vous construire les différentes classes d'amis ?

Les nombres veulent élire des délégués et chaque classe d'amis doit être représentée. Pour être élu délégué de sa classe, un nombre d doit avoir la propriété suivante :

> *Le délégué respecte tous ses amis : pour chaque ami n de l'entier d, les deux derniers chiffres du produit $n \times d$ sont exactement le nombre n.*

Toutes les classes d'amis peuvent-elles élire un délégué ?

Dans chaque classe, les amis veulent s'envoyer des messages. Ils doivent donc trouver des facteurs :

> *Etant donnés deux amis m et n, peut-on trouver un ami f (le facteur) tel que les deux derniers chiffres du produit $m \times f$ soient exactement le nombre n ?*

Vous devez aider les nombres amis à trouver des facteurs, mais c'est difficile. Essayez de trouver d'abord des super-amis :

> *Deux amis m et w sont des super-amis si les deux derniers chiffres du produit $m \times w$ sont exactement le délégué de leur classe d'amis.*

Comment les couples de super-amis peuvent-ils aider pour trouver des facteurs ?

En utilisant le $\mathbb{N}$book des nombres, pouvez-vous trouver les deux derniers chiffres de 99^{99} ?

3 Les nombres vampires

Un nombre vampire est un nombre à $2n$ chiffres v qui peut s'écrire comme le produit de deux nombres à n chiffres $v = x \times y$ avec en plus, que les chiffres de v sont exactement ceux de x et y, éventuellement mélangés.

Par exemple, $1395 = 15 \times 93$ est un nombre vampire à 4 chiffres.

Pouvez-vous trouver tous les nombres vampires à 4 chiffres ? Vous pourrez essayer d'utiliser l'ordinateur pour programmer vos calculs, par exemple en ligne avec le *Wolfram language* :

`https://www.wolfram.com/programming-lab/`

Pouvez-vous expliquer pourquoi $x = 25 \times 10^k + 1$ et $y = 8(5 \times 10^k + 26)$ forment toujours un nombre vampire $v = xy$ à $2k + 4$ chiffres ? Existe-t-il d'autres formules pour produire des vampires ?

4 Miroir, miroir...

Vous êtes-vous déjà regardé dans le miroir et vu quelqu'un d'autre ? Pour les nombres, ça leur arrive tout le temps. Si 12 se regarde dans un miroir, il voit 21, qui est un autre nombre. De même 345 voit 543 dans le miroir. Mais si 121 se regarde dans un miroir, il se voit lui-même.

Pouvez-vous construire tous les nombres qui, comme 121, se voient eux-mêmes dans un miroir ? Combien y en a-t-il parmi les nombres de 0 à 9 ? de 0 à 99 ? de 0 à 999 ? etc...

Pouvez-vous trouver une méthode graphique pour construire les nombres binaires (c'est à dire avec seulement les chiffres 0 ou 1) qui se voient eux-mêmes dans un miroir ?