Lycée Eiffel et Magendie

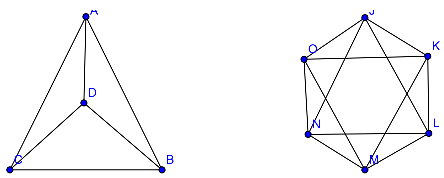
Sujets Maths en Jean 2013/2014

Sujet 1. Des graphes réguliers

Un graphe est constitué de sommets reliés entre eux par des arêtes. Une arête ne peut relier que des sommets distincts. On considère ici que les arêtes ne sont pas orientées.

Robin qui aime partager équitablement se demande s'il existe des graphes dont tous les sommets ont exactement le même nombre d'arêtes. On appelle un tel graphe un graphe régulier et on appelle degré du graphe régulier la valeur commune du nombre d'arêtes partant d'un sommet.

Voici deux exemples de graphes réguliers.



Robin se pose donc la question suivante: existe-t-il des graphes réguliers de degré d avec n sommets pour toutes les valeurs de d et de n?

On pourra chercher s'il n'y a pas des obstructions pour certaines valeurs de d et de n et dans les autres cas chercher à construire directement des graphes réguliers.

Il se demande ensuite s'il existe plusieurs graphes différents qui sont réguliers et qui ont le même nombre de sommets et le même degré.

Finalement Robin s'intéresse au diamètre et au tour de taille des graphes réguliers.

Le diamètre est la grande distance entre 2 sommets du graphe. Le tour de taille est la longueur du plus petit circuit dans le graphe.

Il se demande quel est le diamètre minimum d'un graphe régulier de degré d et denombre de sommets n.

Il se demande également quel lest le tour de taille maximum d'un graphe régulier de degré d et de nombre de sommets n.

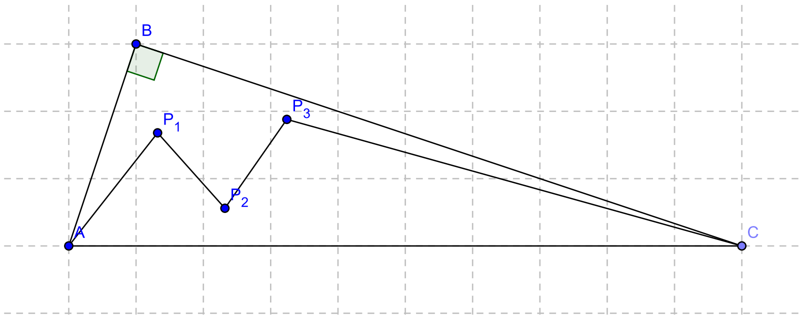
Sur l'exemple 1, le diamètre est de 1, tous les sommets sont à une distance 1 et le tour de taille est de 3. Sur l'exemple 2, le diamètre est de 2 et le tour de taille est de 3.

Sujet 2. Des chemins dans un triangle rectangle

Le petit Derek Tangle adore les triangles rectangles. Il considère un triangle rectangle ABC rectangle en B et il s'amuse à placer des points à l'intérieur du triangle et à les relier. A chaque fois il remarque qu'il peut trouver un chemin partant de A joignant tous les points qu'il a placés et finissant en C tel que la somme des carrés des longueurs de chacun des segments est plus petite que le carré de la longueur de l'hypothénuse.

Plus précisement, s'il a placé n points dans le triangle rectangle, il peut choisir un ordre sur les points et les appeler $P_1, \dots P_n$ de telle façon que :

$$AP_1^2 + P_1P_2^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 + P_nC^2 \leq AC^2. \qquad (1)$$



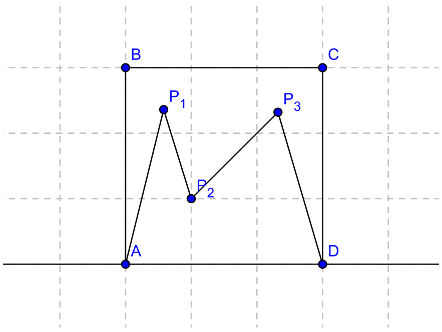
Qu'en pensez vous? Arrivez-vous à montrer ce résultat?

Son ami Terry Engle n'aime pas spécialement les angles droits. Il se demande si la même propriété est vraie pour un triangle quelquonque. Dans le cas où elle n'est pas satisfaite, pouvez-vous trouver une propriété similaire.

Un autre ami Oscar Ray préfère lui les carrés. Ici bien entendu la propriété (2) ne peut pas être satisfaite. En effet on a $AB^2 + BC^2 + CD^2 = 3AD^2$. Il se demande cependanr s'il n'existe pas une constante k telle que la propriété (1) marche avec kAD^2 à la place de AD^2; c'est-à-dire si à chaque fois qu'il place n points, $n \geq 1$ dans le carré, il ne peut pas les ordonner et les appeler $P_1, \dots, P_n$ de telle sorte que

$$AP_1^2 + P_1P_2^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 + P_nD^2 \leq kAD^2. \qquad (2)$$

Que pouvez-vous dire sur cette constante k?



Enfin, Emi Cicle a un faible pour les ... demi cercles! Est-ce que la propriété (2) est vraie? Que pouvez-vous dire?

Sujet 3. Des jeux un peu ruineux
Deux joueurs Agathe et Bertrand jouent à pile ou face. Agathe dispose au début d'un capital de a euros, Bertrand d'un capital de b euros, $a, b \in \mathbb{N}$. On suppose pour le moment que la pièce est équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, Bertrand donne un euro à Agathe. Si la pièce tombe sur face, c'est Agathe qui donne un euro à Bertrand.

1. Intuitivement, quelle est la probabilité que Bertrand soit ruiné avant Agathe si les 2 valeurs a et b sont égales.

2. La question principale de ce sujet est de calculer cette probabilité dans le cas général.

3. Pour aller plus loin, maintenant les 2 joueurs lancent un dé équilibré. Si le résultat du dé 1 ou 2 sort, Bertrand donne 2 euros à Agathe. Si le résultat du dé est 3,4,5,6, Agathe donne un euro à Bertrand.. Quelle est la probabilité que Bertrand soit ruiné avant Agathe?

4. Pour aller encore plus loin: maintenant Corentin veut aussi jouer. Proposer un jeu avec des dés à 3 joueurs et essayer de calculer ou de donner des informations sur les probabilités de ruine de chacun des joueurs.

Sujet 4. Le déménagement infernal Prosper veut déménager. Le couloir fait un L. Un couloir fait 80 cm de large, l'autre fait 1 m de large.

1. Prosper a des planches de 3 mètres de long. Il aimerait savoir s'il pourra les passer (horizontalement) à travers le L du couloir.

2. Quelle est la longueur maximales des planches qu'il pourra faire passer à travers le L du couloir?

3. Maintenant il aimerait savoir si son meuble rectangulaire de 60 cm de long sur 160 cm pourra passer le L.

4. Pour un meuble rectangulaire de 60 cm de large, quelle est la longueur maximale du meuble qui passera le L?

5. Quelle est l'aire maximale d'un meuble rectangulaire qui peut passer le L?

6. La hauteur du plafond est de 2m. Quelle est la longueur maximale d'une tringle à rideaux qu'il pourra faire passerà travers le L?