Sujets Maths en Jeans 2023-2024

1. *Coloriage de figures*

(a) Combien de carrés différents peut-on constituer si ses côtés sont colorés à l'aide de deux couleurs (ou trois ou quatre couleurs). Les deux carrés colorés sont considérés comme identiques si, en tournant l'un d'entre eux, on trouve l'autre.

(b) On peut poser une question analogue pour un rectangle au lieu d'un carré.

(c) Combien de cubes 1 x 1 x 1 différents peut-on consituer si ses faces sont colorés à l'aide de deux couleurs ?

2. *Les pavages par polyminos*

Les polyminos sont des morceaux d'échiquiers qui sont d'un seul tenant : deux cases quelconques ont au moins un côté en commun. Un polymino composé de deux cases est un domino. Il s'agit d'un rectangle 1 x 2. Un polymino composé de trois cases est un trimino. Il peut avoir la forme d'un rectangle 1 x 3 ou la forme de la lettre L.

1. Un polymino composé de quatre cases est un tétramino. Quelles formes différentes on peut avoir ?

2. Soient n, m deux nombres entiers positifs et R un rectangle n x m.

(a) Sous quelles conditions sur m et n il est possible de paver R à l'aide de dominos ? Quand est-il possible de paver R à l'aide des triminos rectangulaires ? Ou bien à l'aide de tétraminos rectangulaires ?

(b) On choisit deux cases du rectangle R et on note par A l'ensemble des cases qui restent. En fonction du choix de deux cases supprimés on se demande s'il est possible de paver A à l'aide de dominos.

3. *La ruche*

Une ruche d'abeille est un pavage du plan par des polygones, c'est à dire que l'on dispose des polygones côte à côte de sorte à remplir le plan. On considère que la ruche est construite à partir d'un polygone. Afin de consommer le moins de cire possible pour construire la ruche, les abeilles veulent maximiser le rapport : R =aire/périmètre. Quel est le meilleur pavage composé des polygones réguliers identiques?
Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés sont de même longueur et tous les angles sont de même mesure. On peut envisager aussi un pavage composé des polygones réguliers différents.

4. *Que des carrés et des rectangles*

(a) On cosidère une grille carrée de taille n x n et on veut compter les carrés plus petits que contient cette grille. Par exemple, la grille 3 x 3 contient 9 carrés de taille 1 x 1 et 4 carrés de taille 2 x 2. Ainsi, au total, notre grille 3 x 3 contient 9+4+1 = 14 carrés. De façon plus générale : combien de carrés de taille k x k contient une grille carrée de taille n x n ? Combien de carrés contient au total une grille n x n ? (b) Combien de rectangles de taille k x l contient une grille carrée de taille n x n ? Combien de rectangles au total ? On peut se poser la même questions pour les grilles rectangulaires de taille n x m

5. *On roule*

On pivote un cube qui se déplace sur le plan suivant un réseau de carrés. On peut alors atteindre n'importe quelle case. Mais que se passe-t-il si l'on interdit à une face de toucher le plan ? Peut-on encore atteidnre toutes les positions ? Et si deux faces du cube sont interdites ? On peut aussi poser la question s'il est possible de revenir à la case de départ. Et si on pivote un tétraèdre ?

6. *Peut-on éclairer la maison entière ?*

Un éléctricien inexpérimenté se charge de l'installation d'une maison et commets des erreurs qui entraînent un allumage hétéroclite des pièces : lorsque l'on allume la lumière dans une pièce, on change l'état de l'éclairage dans toutes les pièces voisines à celle-ci (d'éteint à allumé et d'allumé à éteint). Les pièces en diagonale ne sont pas considérées comme adjacentes et ne sont donc pas concernées par le problème cité ci-dessus. Un problème se pose alors : comment allumer toutes les pièces de la maison sachant que les pièces sont au départ toutes éteintes. On peut considérer des maisons rectangulaires ainsi que des maisons de formes diverses.

7. *Les derniers chiffres*

(a) Que peut-on dire de derniers chiffres dans la suite de carrés des entiers consécutifs, $1^2 = 1 \times 1 = 1,\ \ 2^2 = 2 \times 2 = 4,\ \ 3^2 = 3 \times 3 = 9,\ \ 4^2 = 4 \times 4 = 16,\ \ 5^2 = 5 \times 5 = 25, ...$

(b) Que peut-on dire de derniers chiffres dans la suite de cubes des entiers consécutifs, $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1,\ \ 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8,\ \ 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27,\ \ 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64, ...$

(c) La question analogue pour la suite $2,\ \ 2 \times 2,\ \ 2 \times 2 \times 2,\ \ 2 \times 2 \times 2 \times 2, ...$

(d) La question analogue pour la suite $3,\ \ 3 \times 3,\ \ 3 \times 3 \times 3,\ \ 3 \times 3 \times 3 \times 3, ...$

8. *Au marché*

(a) Un paysan doit livrer sa récolte de blé (90 sacs) au marché de la ville voisine, distante de 50 km. Pour cela, il fait appel à un charretier. La charrette de celui-ci peut transporter 50 sacs. Le charretier demande comme salaire un sac de blé pour chaque kilomètre parcouru à l'aller. Heureusement, il ne demande rien pour le trajet retour. Combien le paysan va-t-il pouvoir apporter de sacs au marché ?

(b) On pose un problème analogue pour plusieurs paysans, chacun avec 90 sacs de blé à livrer à la ville distante de 50 km.