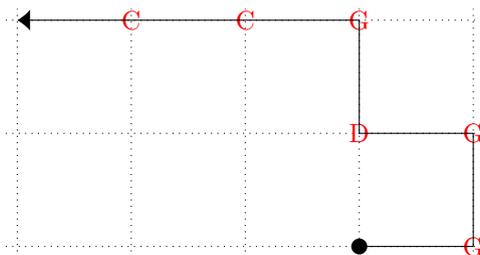


Dessins automatiques

Sujet MeJ 2021
Vincent Delecroix

On considère des dessins dans le plan obtenus en faisant un tracé sur la grille sans lever le stylo. A chaque croisement de la grille, l'étape suivante correspond soit à tourner à gauche (G), soit à tourner à droite (D) soit continuer tout droit (C) (on interdit le demi-tour). Voilà le dessin qui correspond à la suite GGCDGCC



On s'intéresse plus particulièrement aux dessins qu'on va obtenir via des *règles de remplacement*. Notre premier exemple de remplacement est la règle définie sur les lettres de la manière suivante

$$f(G) = GD \quad f(D) = C \quad f(C) = GD$$

On applique cette règle à tout un mot en collant les remplacements des lettres

$$f(GCDC) = f(G)f(C)f(D)f(C) = GDGDCGD.$$

En appliquant successivement cette même règle f à partir du mot G on obtient la suite

$$G \mapsto GD \mapsto GDC \mapsto GDCGD \mapsto GDCGDGDC \mapsto GDCGDGDCGDCGD \mapsto \dots$$

Faites les dessins pour les mots ci-dessus. Que constatez-vous ? Pouvez-vous imaginer une forme limite ?

La seconde règle de remplacement s'appelle t et opère seulement sur les mots contenant les lettres G et D . Pour un mot donné, la règle t consiste à recopier ce mot, écrire la lettre G puis écrire le mot à l'envers en échangeant G et D . Par exemple

$$\begin{aligned} t(G) &= G \cdot G \cdot D = GGD \\ t(D) &= D \cdot G \cdot G = DGG \\ t(GG) &= GG \cdot G \cdot DD = GGGDD \\ t(GD) &= GD \cdot G \cdot GD = GDGGD \\ t(GGDG) &= GGDG \cdot G \cdot DGDD = GGDGGDGDD \end{aligned}$$

En partant du mot G et en appliquant successivement cette règle t on obtient la suite suivante

$$G \mapsto GGD \mapsto GGDGGDD \mapsto GGDGGDDGGGDDGDD \mapsto \dots$$

Faites les dessins pour les mots ci-dessus. Que constatez-vous ? Pouvez-vous imaginer une forme limite ?

Imaginez d'autres règles de remplacement et interrogez vous sur la forme du dessin que vous obtenez en appliquant itérativement cette règle au mot G . En particulier, les dessins contiennent-ils des auto-intersections ? Est-ce que les dessins partent dans une direction ou explorent tout l'espace ? Pouvez-vous donner un sens à la forme limite ?