

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES
JEAN LERAY

MATH.EN.JEAN

Polyominos

Samuel ETOURNEAU

Collège LA REINETIÈRE

Collège LA COLINIÈRE

13 Septembre 2019

Introduction

Les polyominos sont des figures constituées de carrés de mêmes longueurs, agencés de façon à ce qu'un carré soit toujours en contact avec au moins un autre carré via un côté commun.

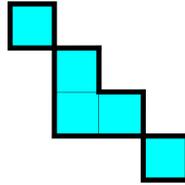


FIGURE 1 – Une figure qui n'est pas un polyomino

Sur la figure 1 deux des carrés n'ont aucun côté en communs avec les autres, ce n'est donc pas un polyomino. Vous ne voyez toujours pas ? Pourtant vous avez sans doute tous déjà joué avec des *dominos* ! Les dominos sont des polyominos avec seulement deux carrés sur lesquels on a rajouté des numéros.



FIGURE 2 – Un domino est un exemple de polyomino

Attention cependant, deux polyominos sont considérés identiques s'il est possible de les superposer une fois découpé. En termes plus scientifiques, on dit que les polyominos sont considérés à *rotation & symétrie* près. Ainsi sur la figure suivante on observe un même polyomino dans différentes positions.

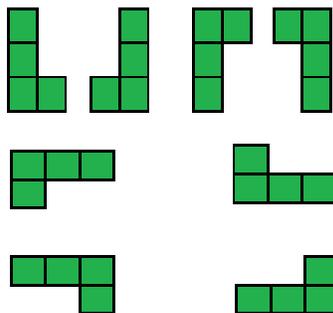


FIGURE 3 – Un même tetromino dans différentes positions

On présente ici deux sujets autour des polyominos, le second est plus délicat que le premier, mais chacun peut être traité indépendamment de l'autre.

1 Polyominos en général

1. Combien existe-t-il de triominos (des polyominos avec 3 carrés) ?
2. Combien existe-t-il de tetrominos ? (*indice* : c'est avec eux que l'on joue à Tétris!)
3. Combien existe-t-il de pentominos ?



Bon je crois que vous avez compris que plus le nombre de carrés augmentent plus il y a de possibilités pour les agencer. Et cela augmente rapidement, par exemple avec dix carrés on compte pas moins de 4655 décaminos! Maintenant que vous avez compté le nombre de pentaminos nous allons nous amuser un peu avec...

On cherche à remplir un rectangle en utilisant une seule fois chacun des pentaminos de façon à ce qu'aucun d'entre eux n'en chevauche un autre. Pour se faire on pourra bien-sûr prendre le temps de découper les différents pentominos afin de faire des manipulations.

4. Comment remplir un rectangle 6×10 ?
5. Comment remplir un rectangle 5×12 ?
6. Comment remplir un rectangle 4×15 ?
7. Existe-t-il d'autres rectangles que l'on peut remplir avec les pentaminos ? Si oui, comment les remplir ?

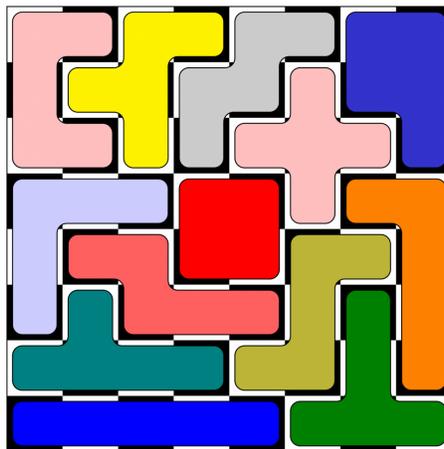


FIGURE 4 – Exemple de remplissage

2 Hexaminos & Triominos

1. Combien de faces possède un cube ?
2. Parmi les 35 hexaminos, lesquels sont le patron d'un cube ?

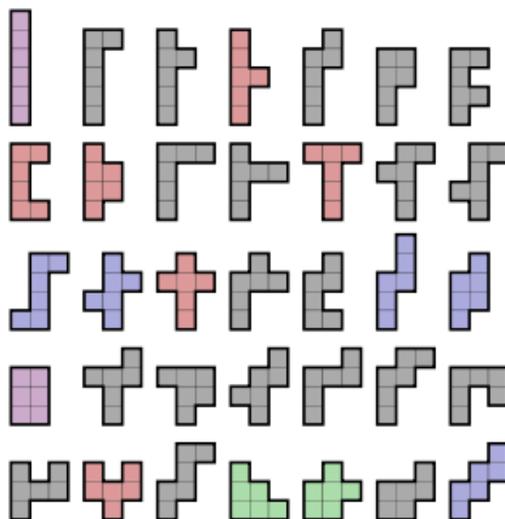


FIGURE 5 – Liste des différents hexaminos

On considère à présent un échiquier de dimension 2×2 qui comporte donc 4 cases. Et on cherche à le remplir avec des triominos uniquement coudés.

3. Pourquoi est-il impossible de remplir un tel échiquier ?

On retire à présent une case de l'échiquier, case qui ne devra donc pas être recouverte par un triomino !

4. Peut-on remplir l'échiquier avec des triominos coudés ?
5. Même question avec un échiquier de $4 \times 4 = 16$ cases auquel on retire une case.
6. Montrer qu'en enlevant une case à un échiquier composé de $2^n \times 2^n$ cases on peut toujours le remplir avec des triominos coudés.

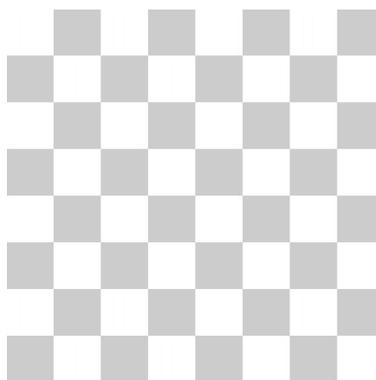


FIGURE 6 – Échiquier 8×8

À présent on utilise exclusivement des triominos droits.

7. Est-il possible de remplir un échiquier 2×2 , duquel on a retiré une case ?
8. Est-il possible de remplir un échiquier 4×4 , duquel on a retiré une case ?
9. Montrer qu'en choisissant bien la case qu'on enlève, il est possible de remplir un échiquier 8×8 .