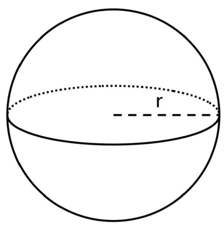
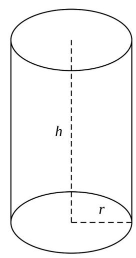
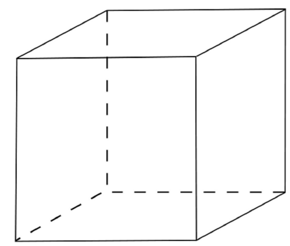
La saviez-vous ? ★ ★ ★ ☆ ☆

Beaucoup de produits dits « de conserve » sont conditionnés en boites métalliques. L'objectif pour les fabricants est de trouver une forme de boite qui optimise le rapport $\rho = \frac{\text{Volume}}{\text{Aire}}$. On considère ici uniquement trois formes de boite, et on rappelle les formules d'aires et de volumes de ces boites :







$$V_{\text{Sphère}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad A_{\text{Sphère}} = 4\pi r^2$$

$$V_{\text{Cylindre}} = \pi r^2 h \qquad A_{\text{Cylindre}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V_{\text{Cube}} = c^3 \qquad A_{\text{Cube}} = 6c^2$$

1. Pour un volume fixé d'un litre, quel est la forme de boite qui optimise (rend le plus grand possible) le rapport ρ ?
2. Comment expliquez-vous la forme des boites cylindriques des boites de conserve dans le commerce ?

Encore une fois il existe plusieurs formes de cylindre :

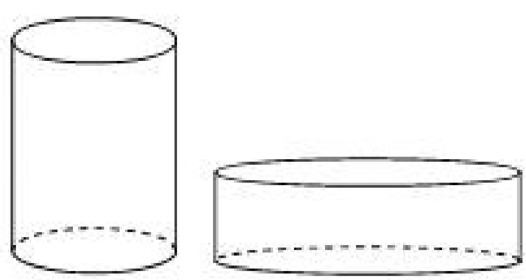


Figure 1 – Différentes formes de cylindre

On cherche alors à déterminer la meilleure forme de boite de conserve possible sachant que dans le commerce les boites ont une contenance de 850 ml.

3. Trouvez les dimensions du cylindre qui minimise l'aire.
4. Prenez une boite de conserve et mesurez-en les dimensions. Qu'observez-vous ?

Cette différence provient de contraintes industrielles, en effet pour obtenir les disques en métal il faut les découper dans des plaques rectangulaires. Forcément il y a des chutes, et l'objectif de l'industriel est de limiter ce phénomène, en maximisant le pourcentage $\lambda = \frac{\text{Aire des disques}}{\text{Aire de la plaque}}$. Une première solution naïve est la disposition suivante :

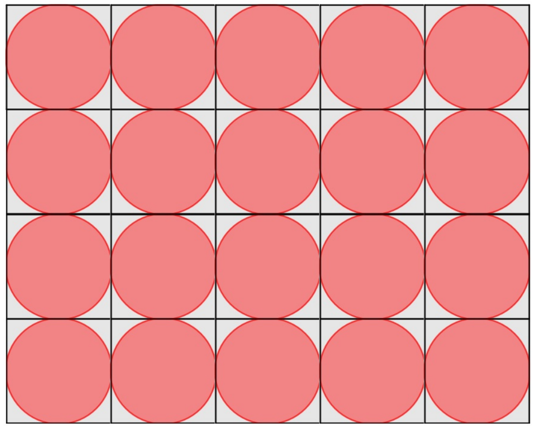


Figure 2 – Possibilité de répartition des disques sur une plaque

5. Calculez le pourcentage utile λ d'une telle plaque en métal ?
6. Proposez une disposition optimale, et calculer le pourcentage utile λ de cette disposition.