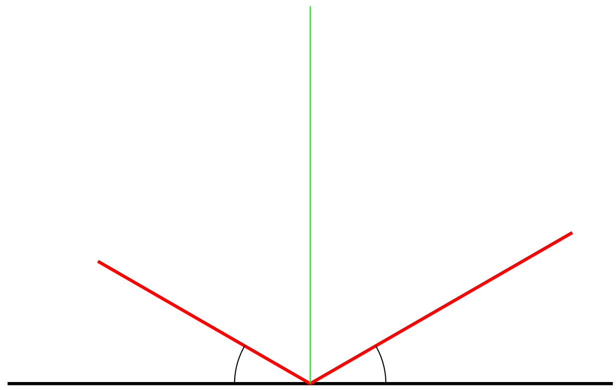
Trajectoires périodiques dans les billards polygonaux

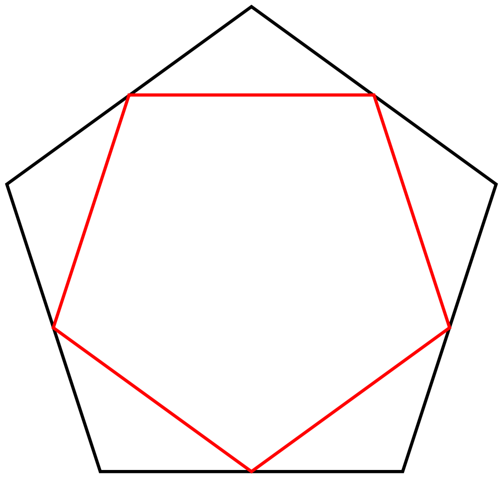
Ce que les mathématiciens appellent jeu de billard est très simple à définir. On se donne une table de billard, autrement dit un morceau du plan d'aire finie (un rectangle comme on le connait dans la vie courante, mais cela peut être un disque, l'intérieur d'une ellipse, un polygone plus compliqué ...). La boule est un point (ce qui est une simplification notable par rapport à la réalité), elle se déplace à vitesse constante dans la table et lorsqu'elle touche le bord, elle fait un rebond en suivant les lois classiques de la réflexion : l'angle d'incidence est égal à l' angle de réflexion.

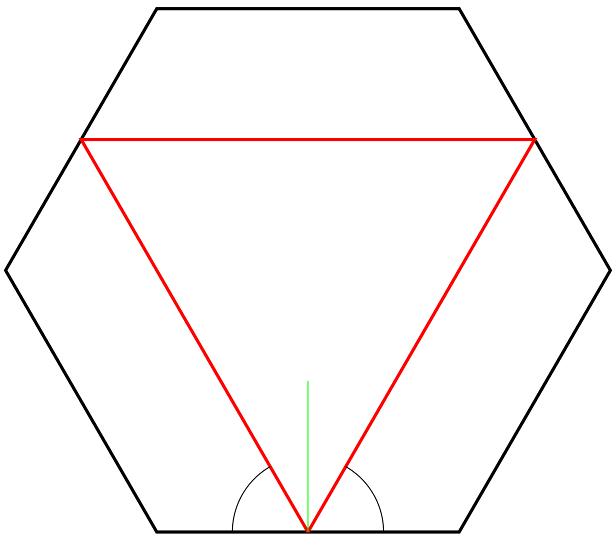


Il n'y a donc pas d'effet et la boule ne s'arrête jamais. On appelle espace des phases les couples : points de la table, directions. La position de notre boule à un instant donné dépend bien entendu non seulement de l'endroit où elle se trouve au début mais aussi de la direction dans laquelle on l'envoie.

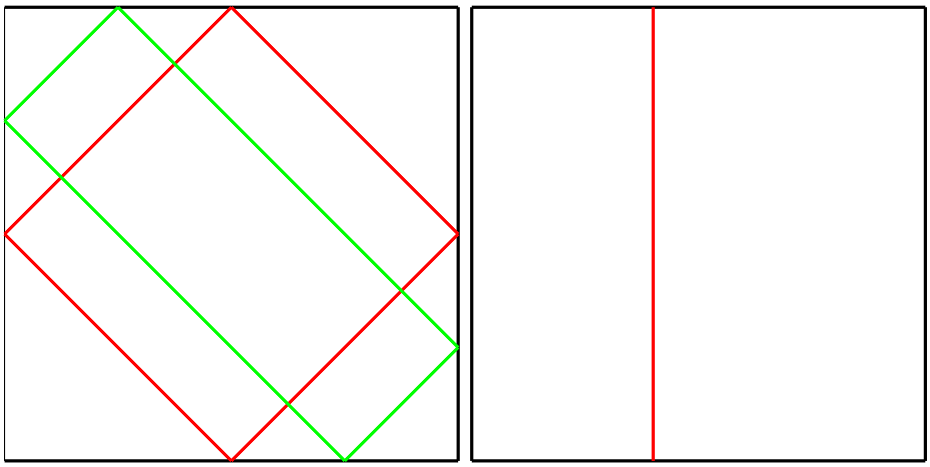
On peut se demander pourquoi certains mathématiciens s'intéressent à ce système. Il y a, plusieurs répones. Le billard est un exemple de système dynamique, c'est-à-dire un système en mouvement dont on essaie de comprendre l'évolution au cours du temps. Tout d'abord, cet exemple est simple à présenter. On vient de le faire en quelques lignes sans trop caricaturer le modèle. Il y a très peu de paramètres, si on veut tester des méthodes, cela semble une situation modèle (jouet comme nous disons) ou l'on pourra tester leurs efficacités. Il y a infiniment moins de paramètres que dans le système solaire par exemple! Ensuite le système a des comportements très différents en fonction de la forme de la table. On n'étudie pas de la même façon le billard dans une table convexe, concave ou polygonale. Enfin, les problèmes sont difficiles, comme on va le voir dans la suite de ce texte. Pour vous en convaincre, l'exemple du billard concave est frappant. Sinai (aujourd'hui professeur Princeton, USA) commence à étudier le billard concave dans sa thèse à la fin des années cinquante. Depuis ce sujet a fait couler beaucoup d'encre. Certains résultats annoncés par Sinai à l'époque, n' ont été démontrés que récemment ! Tout un tas de techniques sophistiquées ont dues être mises en place pour cela.

Dans cette note, nous supposerons que la table est un polygone. Voici une question simple qui est pourtant un problème ouvert aujourd'hui. Pour la poser, nous avons besoin de définir quelques termes. On dit qu'une trajectoire du billard est périodique si au bout d'un certain temps la boule repasse par le même point avec la même direction. Attention, on demande que la direction soit la même pour qu'ensuite la trajectoire se répète indéfiniment.





Si une trajectoire repasse par le même point avec une direction différente de la direction de départ, on ne peut pas dire grand chose sur ce qu'elle va faire dans le futur. La longueur d'une trajectoire périodique est le temps que le point met pour revenir à sa position initiale avec sa direction de départ. Les trajectoires périodiques sont sympathiques car si on les connait pendant un temps fixe (leur longueur) on peut dire avec certitude ce qu'elles feront dans le futur. La table de billard la plus facile à étudier est le carré (ce qui est essentiellement la même chose que le "vrai" billard rectangulaire). Peut on trouver beaucoup d'orbites périodiques dans ce cas ? En regardant la figure suivante, on s'aperçoit que dans la direction verticale, touts les trajectoires sont périodiques. C'est pareil dans la direction horizontale, ou bien 45 degrés. On a l'impression qu'il y en a des quantités. Dans ce cas, il n'est pas difficile de les comprendre toutes.

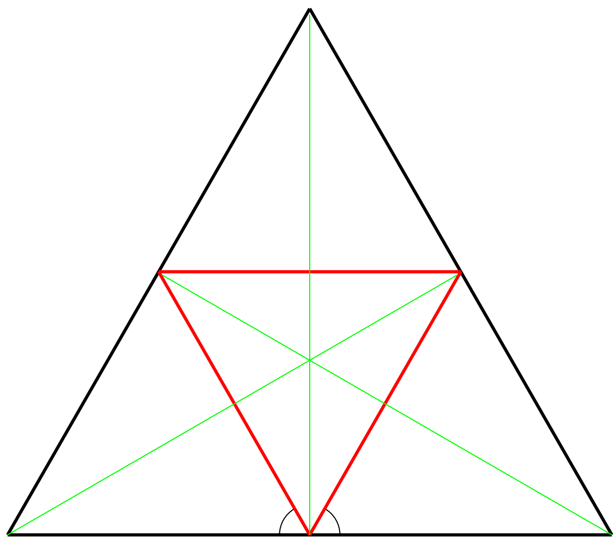


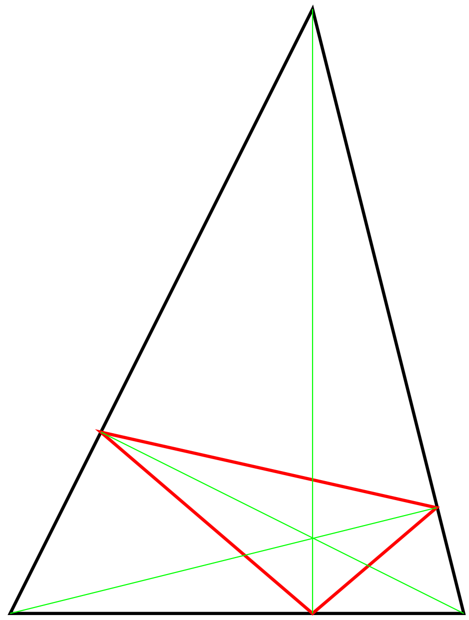
On peut essayer de faire la même chose dans un triangle équilatéral, ou un polygone régulier général. Cela devient fastidieurx mais dans tous les cas, on trouve des trajectoires périodiques ! Katok (professeur à l'université Penn state aux USA et éminent spécialiste de systèmes dynamiques) a posé la question suivante :

Est ce que, dans TOUT triangle, il y a (au moins) une trajectoire de billard périodique ?

On ne sait pas répondre à cette question pour l'instant. On dit que c'est un problème ouvert. Katok a même promis 10000 dollars à celui qui trouverait une solution à ce problème, ce qui signifie à quel point, il pense que c'est difficile. Personnellement, je trouve ce genre de question fascinante : il faut très peu de connaissance pour la poser, néanmoins, on ne sait pas la résoudre !

Avant d'expliquer quelques résultats partiels sur ce problème, je veux faire une mise en garde. Il est très vraisemblable que dans tout triangle il y ait au moins une orbite périodique. Par conséquent, trouver un exemple, même compliqué ou il y a une orbite périodique (de très grande longueur) n'est pas une solution au problème. Ce qu'on veut est une réponse (positive) pour tous les triangles. Un cotnre-exemple serait aussi une réponse mais aucun spécialiste ne croit que cela existe. Il y a en effet de bonnes raisons de penser que la réponse est oui. Lorsque le triangle est aigu (tous les angles sont inférieurs à l'angle droit), on sait depuis le dix huitième siècle construire des trajectoires de billard périodiques dans les triangles. Fagnano a montré que la trajectoire qui passe par les pieds des trois hauteurs est une trajectoire de billard périodique.





Le montrer est un joli exercice de géométrie élémentaire. On considère que c'est le premier résultat sur le billard. Il n'est pas très difficile de montrer que lorsque les angles sont des nombres rationnels, il y a toujours une trajectoire périodique (ce qui motive fortement la question de Katok). Ceci est néanmoins trop compliqué pour que nous puissons l'expliquer ici. C'est un résultat abstrait dans le sens où on ne construit pas la trajectoire, on montre uniquement qu'elle existe. On notera au passage que lorsque les angles d'un billard sont des nombres rationnels on a des outils mathématiques très puissants pour étudier ce système dynamique. De tels outils n'existent pas en général, c'est pourquoi, de nombreuses questions sur les billards polygonaux sont sans réponse.

Dans les années quatre ving dix, un certain nombre de mathématiciens, ont essayé de faire des constructions géométriques plus compliquées que celle de Fagnano pour résoudre le problème de Katok. Cela permet d'augmenter le domaine où la réponse est affirmative mais on est très loin de traiter tous les cas. Ces constructions sont différentes les unes des autres, certaines techniquement compliquées (huit rebonds par exemple) mais l'approche est toujours la même que celle de Fagnano : c'est de la géométrie élémentaire.

Richard Schwartz montre que dans TOUT triangle, dont le plus grand angle est inférieur à 100 degrés il y a une trajectoire de billard périodique.