Sujet Seconde – Les fractions égyptiennes

Une fraction est dite simple si elle est de la forme $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre entier naturel non nul. Durant l'antiquité, on écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 sous la forme de sommes de fractions simples deux à deux distinctes.

Par exemple, on a : $\frac{25}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$.

1/ *Cas d'un dénominateur puissance de 2.* Décomposez $\frac{5}{8}$ en une somme de fractions simples toutes différentes. Traitez d'autres exemples de fractions inférieures strictement à 1 et dont le dénominateur est une puissance de 2. Achevez en donnant un algorithme traitant le cas général des fractions inférieures strictement à 1 et dont le dénominateur est une puissance de 2.

2/ *Quelques décompositions remarquables.* A présent, donnez une décomposition, « la plus courte possible », de $\frac{2}{\mathrm{pq}}$ et $\frac{2}{\mathrm{p}^2}$ où p et q sont deux entiers naturels impairs. En déduire la décomposition de $\frac{2}{2\mathrm{n}+1}$ où n est un entier naturel non nul. Trouvez d'autres décompositions remarquables.

3/ *Démonstration de l'existence.* Vérifiez que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)}$. Déduisez-en que toute fraction s'écrit sous la forme d'une somme de fractions simples deux à deux distinctes. Quel est votre avis sur cette méthode de décomposition ?

4/ *Etude de l'unicité.* Un rationnel positif non nul admet-il une unique décomposition est-elle unique ?

5/ *Algorithme.* Donnez un algorithme donnant la décomposition en fractions simples d'une fraction inférieure strictement à 1.

6/ Sur le papyrus Rhind (1 650 av. J.-C), on lit que $\frac{256}{81}$ est une approximation de π. En déduire une approximation de π sous la forme d'une somme d'un entier et de fractions simples deux à deux distinctes.

Indications.

- Il s'agit en fait des fractions égyptiennes. A la fin des travaux des élèves, des recherches sur internet pourront être effectués pour un apport historique.
- Pour la première question, poser des divisions euclidiennes successives par 2, ou mieux arriver à l'écriture en base 2 d'un entier.