

1a) Cinq enfants se placent les uns derrière les autres sur une ligne, dans un ordre arbitraire. Leurs tailles sont donc a priori réparties un peu n'importe comment. Peut-on toujours en trouver trois qui seront "bien rangés", c'est-à-dire en ordre croissant de leur taille, décroissant de leur taille, ou de même taille ? En commençant avec plus d'enfants, peut-on s'assurer qu'on en trouvera toujours quatre bien rangés ? Cinq bien rangés ? etc...

Abstraitement, étant donné un entier naturel k , peut-on toujours trouver n tel que toute suite de nombres entiers quelconque a_1, a_2, \dots, a_n , contient une sous-suite monotone (croissante, décroissante ou constante) ? Si oui, quel est le plus petit n qui convient ?

1b) On place cinq points dans le plan en "position générale" (trois points ne sont jamais alignés, et parmi les droites qu'ils déterminent, trois d'entre elles ne sont jamais concourantes). Peut-on toujours trouver quatre de ces points qui forment un polygone convexe ? En commençant avec plus de points, peut-on toujours en trouver cinq qui formeront un polygone convexe ? etc...

1c) On place six points dans le plan. On en relie certains par des arêtes, d'autres non. Les arêtes peuvent se couper. Peut-on toujours trouver trois points qui sont tous reliés entre eux, ou trois points qui ne sont pas du tout reliés entre eux ? En commençant avec plus de points, peut-on toujours trouver trois points qui seront tous reliés entre eux, ou quatre qui ne seront pas du tout reliés entre eux ? etc.