Quel est le nombre suivant ?

Il existe bien des manières de définir des suites de nombres (u_n).
Cela peut se faire par des formules explicites :
2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101… (pouvez-vous trouver (u_n) en fonction de *n* ?)
ou par des règles indiquant comment calculer u_n en fonction du terme précédent u_{n-1}, voire des deux précédents :
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… (pouvez-vous exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et u_{n-2} ?),
ou par des moyens plus compliqués.

Voici une règle qui produit des suites (u_n) définies pour $n \geq 1$, et dont le comportement est parfois étonnant :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = u_{u_{n-1}} + u_{n-u_{n-1}}.$$

Les indices dans le membre de droite sont eux-mêmes calculés à partir des termes de la suite !

On peut commencer par explorer le cas où l'on choisit $u_1 = 1$.
Est-il possible de calculer u_2, u_3, u_4 ?

Si on fixe un certain nombre de valeurs initiales u_1, u_2 ... qui sont des nombres entiers naturels, est-il toujours possible de calculer tous les termes suivants ?

Si on choisit cette fois $u_1 = u_2 = 1$, que dire de la suite (u_n)? (suites considérées par John Horton Conway).

Si la règle est maintenant $u_n = u_{n-u_{n-1}} + u_{n-u_{n-2}}$ (suites considérées par Douglas Hofstadter), c'est encore plus mystérieux.
Examiner le cas de $u_1 = 3$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1$, puis le cas de $u_1 = u_2 = 1$, voire d'autres cas.