La cigale et la Fourmi font des maths !
La fourmi invite ses amies.

Année 2013 - 2014

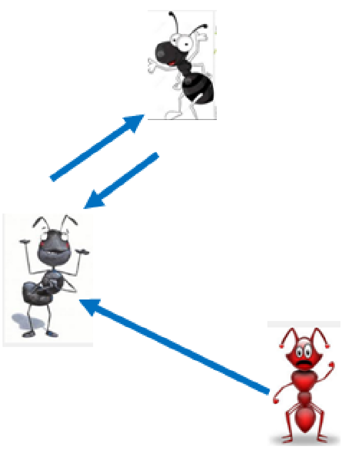
Noms et Prénoms des élèves, niveaux : **Elèves de 4ème et de 3ème**
Sara KHETTABI, Emeline PERRET, Hugo IVANOWSKI Kélian GURIN-DEBUT, Théo MONTUELLE, Kévin ANDRIANARISOA, THIRUNAVUKKARASU Keerthana, SZABO Blanche, Rollet Léa, ETEL Noa
Établissement : **Collège Robert BURON à NANDY et La Pyramide à LIEUSAINT.**
Enseignante : **Mme ENDERLIN Céline, M. CAMPESTRINI Hervé et Mme GUHEL Sylvie.**
Chercheuse avec université : **Mme Juliette BAVARD, IMJ Paris VI.**

Présentation du sujet :

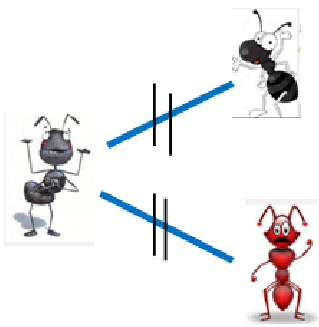
Nous prenons comme point de départ la fable de Jean de La Fontaine, *La Cigale et la Fourmi*. Que s'est-il passé après cette célèbre dispute ?

Après avoir passé quelques jours à ranger, la Fourmi invite ses amies. L'une d'entre elles, voyant la réserve de grains, propose de faire un lancer de grains, en suivant un protocole bien particulier : les fourmis se placent dans la maison en prenant garde que toutes les distances les séparant soient différentes, ainsi aucune des fourmis n'a deux voisines à la même distance d'elle. Ensuite, chacune lance un grain à sa plus proche voisine.

Un placement possible :



Un placement impossible :



Les questions :

1) Les fourmis ont l'impression qu'il y aura toujours au moins l'une d'entre elles qui ne recevra pas de grain. Ont-elles raison ?

2) Les fourmis ont l'impression qu'il y aura toujours au moins deux fourmis qui échangeront leurs grains lors du lancer. Ont-elles raison ?

3) Les fourmis cherchent à se placer de telle sorte que leur hôte reçoive tous les grains sauf le sien lors du lancer. Est-ce possible ?

4) Peut-on trouver une configuration des fourmis dans la maison pour laquelle deux trajectoires de grains se croiseraient lors du lancer ?

Résultats et conjectures :

Pour répondre à ces quatre questions, nous avons fait de nombreux schémas. Nous avons pu alors trouver grâce à eux, plusieurs éléments de réponses.

Réponse 1 ***:*** Si le nombre de fourmis est pair, alors il existe des cas où toutes les fourmis recevront un grain.
Si le nombre de fourmis est impair, alors dans tous les cas, il existe au moins une fourmi qui ne recevra pas de grain.

Réponse 2 ***:*** Nous avons prouvé qu'il y aura toujours au moins deux fourmis qui échangeront leur grain.

Réponse 3 ***:*** Il est possible de placer les fourmis de telle sorte que l'hôte reçoive tous les grains sauf le sien. Mais cela est possible si le nombre de fourmis total ne dépasse pas 6. Nous n'avons pas pu trouver une configuration avec un plus grand nombre de fourmis ou même prouver que 6 fourmis étaient le maximum.

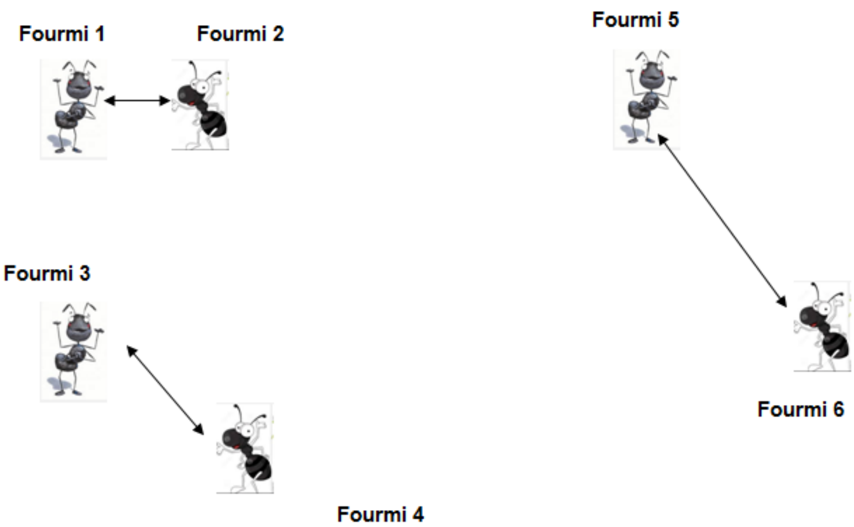
Réponse 4 ***:*** Nous avons prouvé qu'il est impossible d'avoir deux trajectoires croisées.

Nos recherches :

Question 1 : Les fourmis ont l'impression qu'il y aura toujours au moins l'une d'entre elles qui ne recevra pas de grain. Ont-elles raison ?

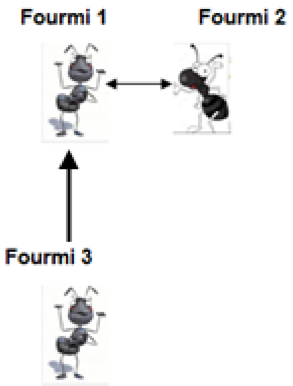
Si le nombre de fourmis est pair, on peut trouver une configuration où toutes les fourmis reçoivent un grain en prenant soin de les espacer suffisamment.

Voici un exemple avec 6 fourmis.(1)

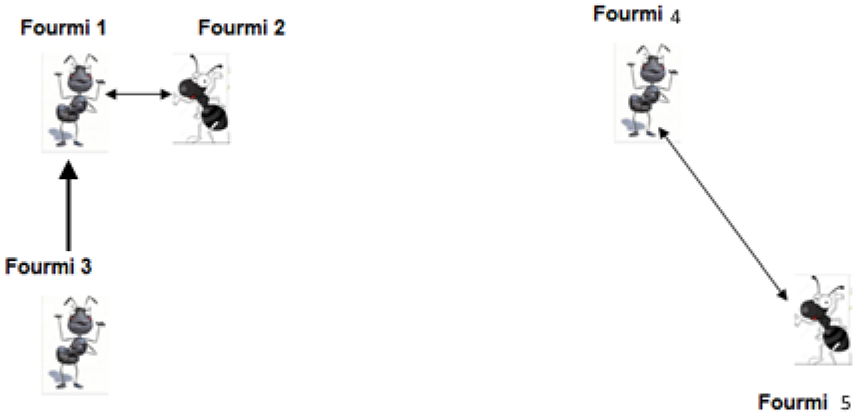


Si le nombre de fourmis est impair, il y a toujours au moins une fourmi qui ne recevra pas de grain. (2)

Voici un exemple avec **3** fourmis :



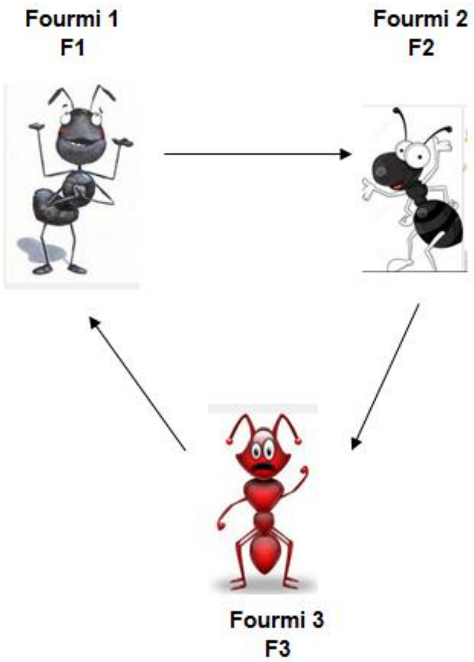
avec **5** fourmis :



•••

Question 2 : Les fourmis ont l'impression qu'il y aura toujours au moins deux fourmis qui échangeront leurs grains lors du lancer. Ont-elles raison ?

Supposons qu'il n'y ait aucun échange de grains entre deux fourmis. Nous avons alors la configuration suivante si on prend le cas de trois fourmis.



Pour que F1 donne son grain à F2 et non à F3, il faut que F1F2 < F1F3.(3)
Pour que F2 donne son grain à F3 et non à F1, il faut que F2F3 < F2F1.

Pour que F3 donne son grain à F1 et non à F2, il faut que F3F1 < F3F2.

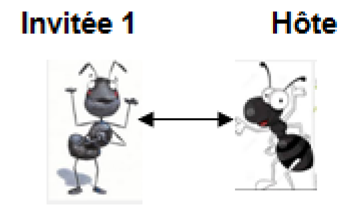
On a alors :
F1F2 < F1F3 < F3F2 < F2F1 et donc F1F2 < F2F1 ce qui est impossible.
Nous pouvons étendre ce raisonnement à un plus grand nombre de fourmis.

Il y aura donc au moins deux fourmis qui échangeront leur grain.

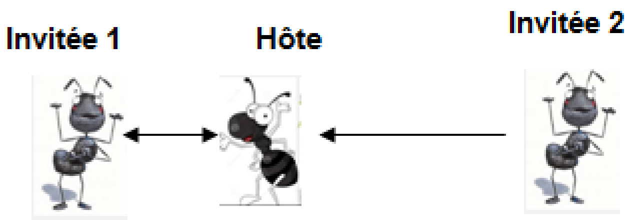
<u>Question 3 : Les fourmis cherchent à se placer de telle sorte que leur hôte reçoive tous les grains sauf le sien lors du lancer. Est-ce possible ?</u>

Voici une proposition pour un nombre de fourmis allant jusqu'à 6.

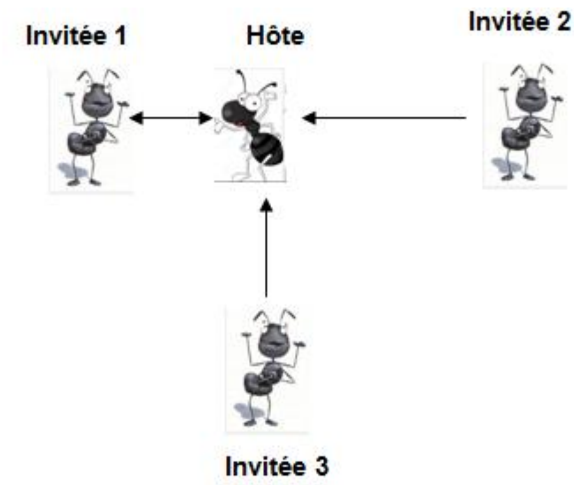
Pour deux fourmis :



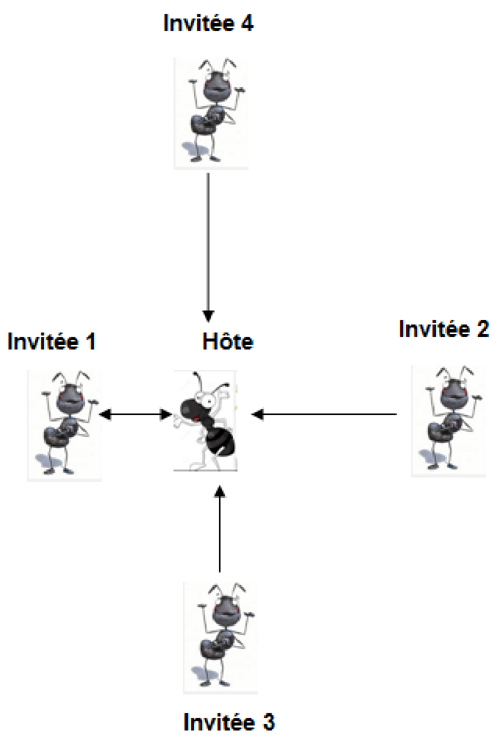
Pour trois fourmis :



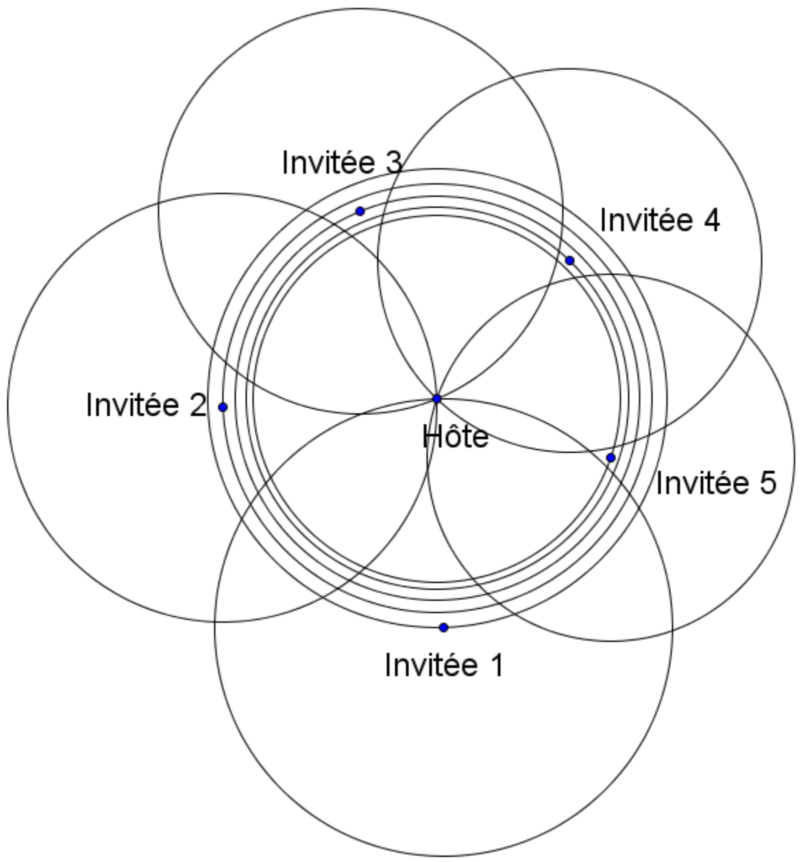
Pour quatre fourmis :



Pour cinq fourmis :



Pour six fourmis : (4)

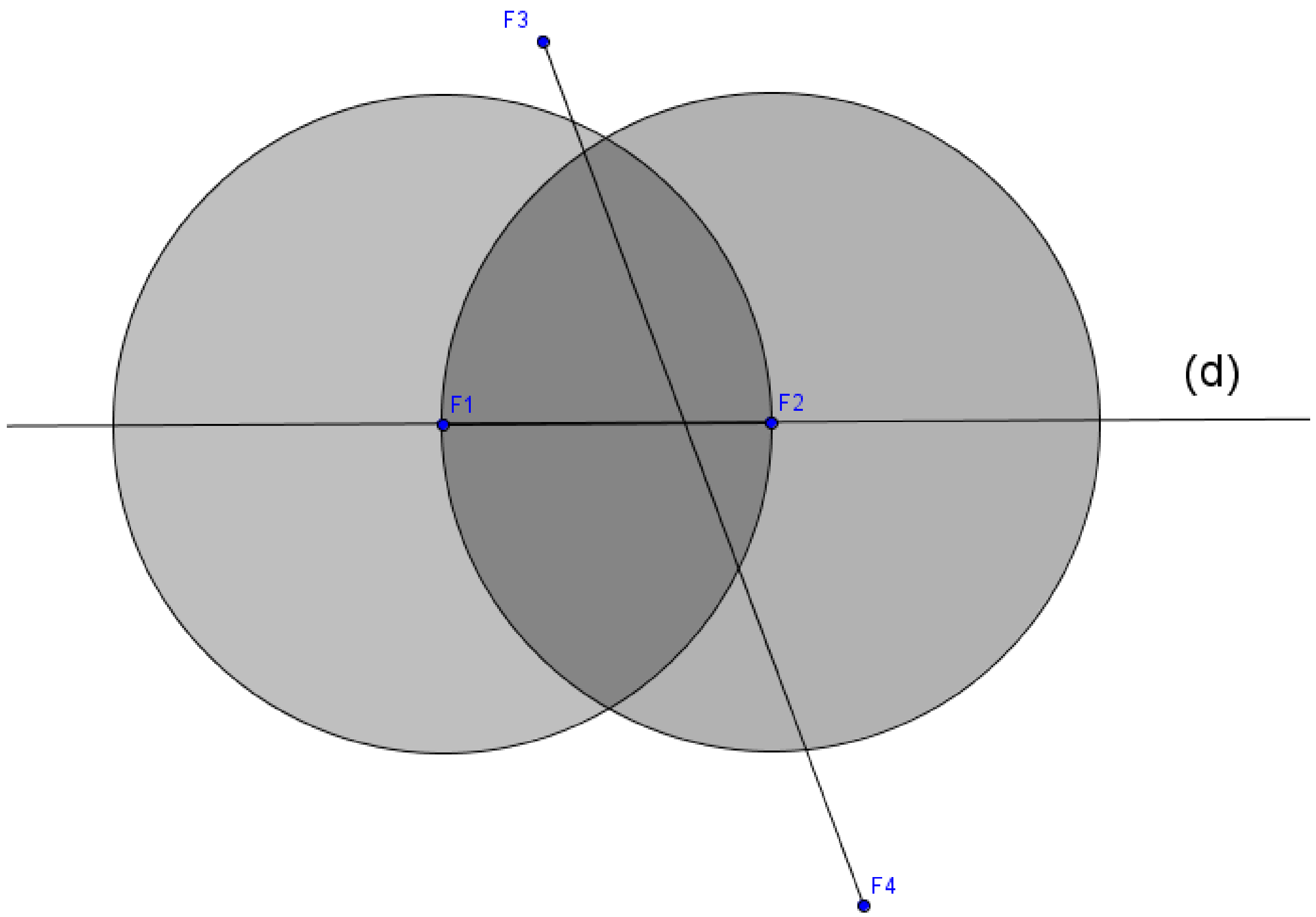


Question 4 : Peut-on trouver une configuration des fourmis dans la maison pour laquelle deux trajectoires de grains se croiseraient lors du lancer ?

Pour avoir deux trajectoires croisées, il faut au moins 4 fourmis. Prouvons que cela n'est pas possible avec un contre-exemple avec 4 fourmis.

Supposons que F1 et F2 échangent entre elles et F3 et F4 échangent entre elles. (5)
Pour obtenir le premier échange, il faut que les distances suivantes F1F3, F2F3, F1F4 et F2F4 soient plus grandes que la distance F1F2. Donc F3 et F4 ne peuvent pas être dans la zone grise délimitée par les deux cercles. (6)

Pour que les trajectoires se croisent il faut que F3 et F4 soient de part et autre de la droite (d).
Ce qui est impossible.
En effet, F3 sera alors plus proche de F1 ou F2 que de F4. Il n'y aura donc pas d'échange entre F3 et F4.



Conclusion :

Nous avons fait en sorte d'être les plus précis possible en répondant à ces diverses questions même si certaines démonstrations mériteraient d'être plus poussées.

Notes d'édition

(1) Les trois paires de fourmi échangent leurs grains.
(2) Il s'agit d'une conjecture qui est appuyée par deux exemples présentés ci-dessous : la démonstration générale demande d'autres investigations.
(3) F1 donne son grain à F2 et non à F3 si et seulement si F1F2<F1F3.
(4) Voici le principe de construction pour 6 fourmis. Nous plaçons l'hôte et l'invitée I1 et traçons le cercle de centre l'hôte passant par I1 appelé C0. Nous traçons également C1 le cercle de centre I1 passant par l'hôte. Nous souhaitons placer l'invitée I2 afin qu'elle envoie son grain à l'hôte et pas à I1. L'invitée I2 doit être placée en dehors de C1 (sinon elle serait plus proche de I1 que de l'hôte et lui enverrait son grain). Nous choisissons de placer I2 à l'intérieur de C0 afin de s'assurer que I2 soit plus proche de l'hôte que de I1. Ce processus est réitéré en traçant tour à tour les cercles successifs de centre I2 puis I3 puis I4 et enfin I5.
(5) La démonstration présentée est valable même s'il n'y a pas d'échange entre F3 et F4. Il suffit que F3 envoie son grain à F4 (ou l'inverse).
(6) F3 et F4 ne peuvent pas être dans la zone grise union des deux cercles.