Billard et problème d'illumination

1 Deux problèmes ouverts

Voici deux problèmes d'énoncé simple, qui sont en grande partie des problèmes ouverts.

1.1 Le problème de blocage des rayons lumineux

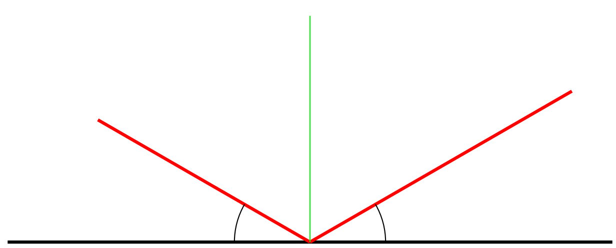
Tout d'abord, un problème que l'on trouve dans les livres d'Olympiades mathématiques de la ville de Saint Péterbourg (à l'époque Lenigrad) dans les années 1960 :

Problème de blocage : Les professeurs Smith et John ne peuvent se supporter et vont se trouver ensemble pour une réunion dans une pièce rectangulaire dont les murs sont des mirroirs. Smith demande à ses étudiants de se placer de telle façon qu'il ne voit pas John. Où doivent se placer les étudiants de Smith ? [1]

On peut se demander *combien* d'élèves sont nécessaires pour bloquer tous les rayons lumineux entre Smith et John.

1.2 Trajectoires de billard et mirroirs

Formalisons un peu pour pouvoir attaquer le problème. Le jeu (mathématique) du billard consiste dans un premier temps à choisir une table de billard, pas forcément rectangulaire et à poser une boule dessus. Après avoir tapé dans cette boule, celle-ci se déplace (idéalement) en ligne droite jusqu'à ce qu'elle rencontre le bord. Quand la boule touche le bord, elle rebondit alors en suivant la loi dite de Descartes. Celle-ci stipule que l'angle de la trajectoire avec le bord après le rebond (qu'on appelle l'angle réfléchi) est égal à l'angle de la trajectoire avec le bord avant le rebond (appelé angle incident). On néglige ainsi toute sorte d'effet et pour simplifier encore plus on suppose que la boule est représentée par un point. Si on considère que le bord de la table est un miroir comme dans le problème de blocage, la loi de Descartes est celle de l'optique. Un rayon de lumière se propageant à l'intérieur de la table et se réfléchissant sur le bord suit la même trajectoire que notre boule de billard. Billard ou mirroir, c'est donc pareil.

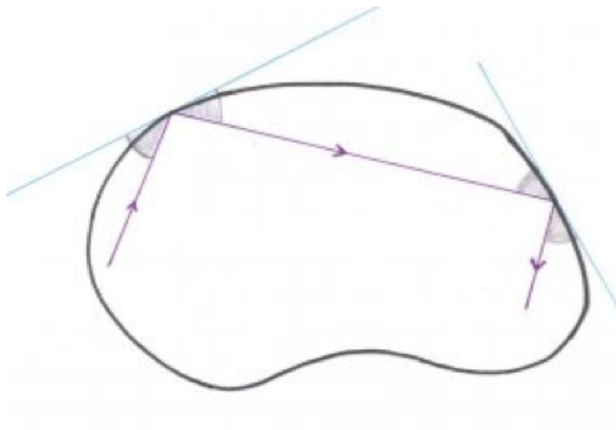


Loi de la réflexion de Descartes

En chaque rebond, les angles réfléchis et incidents sont mesurés par rapport à une droite particulière qu'on appelle tangente au bord. Cette droite peut s'obtenir de la façon suivante.

1. Bien entendu, Smith peut voir John directement mais son image peut aussi se réflechir grâce aux mirroirs. Il faut bloquer *tous* les rayons lumineux.

Lorsqu'on zoome un grand nombre de fois sur un point du bord, le bord finit par ressembler à une droite (de la même façon que la terre nous paraît plate alors qu'elle ne l'est pas lorsqu'on l'observe depuis l'espace). Lorsqu'un côté est un segment, la tangente est le côté lui-même, on sait bien ce qu'est la tangente à un cercle. La figure ci-dessous illustre la trajectoire d'une boule sur une table de billard.



Trajectoire de billard

1.3 Problème de l'illumination

Etant donnée une table de billard, est-il possible de trouver deux points B et R de la table tels qu'une source lumineuse, émettant dans toutes les directions, et placée en B n'éclaire pas R ?

Dans la terminologie du billard, on cherche où poser deux boules, l'une blanche et l'autre rouge de telle sorte qu'il soit impossible de jouer la boule blanche B de façon qu'elle vienne toucher la boule rouge R. Remarquons tout de suite qu'on n'impose pas de restrictions sur le nombre de rebonds que fait la trajectoire éventuelle de B à R. En d'autres termes, peut-on trouver des positions des boules blanche et rouge telles que, même un joueur expert, ne puisse atteindre la boule rouge avec la blanche.

A première vue, on peut imaginer qu'une telle situation n'existe pas si l'on pense au billard classique dans un rectangle où on peut aller directement d'un point à un autre (ou dans un disque). On va voir que c'est possible de construire un tel exemple mais qu'il faut un peu d'imagination et sans doute un peu de génie. C'est Roger Penrose qui a donné le premier une construction de région non illuminable. Son idée (connue comme *the Penrose's trick*) est basée sur les propriétés des ellipses.

2 Ellipse

2.1 Une définition

Une ellipse n'est pas un ovale quelconque, elle a une définition mathématique précise.

Une ellipse est caractérisée par la donnée de deux points F et F' et d'un nombre R (strictement plus grand que la distance de F à F'). L'ellipse est alors formée des points M vérifiant la propriété suivante : $MF + MF' = R$. Les points F et F' sont appelés les foyers de l'ellipse.

D'un point de vue pratique, pour dessiner une ellipse, il suffit donc de prendre une ficelle terminée par deux punaises, de pointer les punaises en F et F' et ensuite de tendre la ficelle avec le crayon. En faisant tourner le crayon autour des punaises (tout en maintenant la ficelle tendue), on dessine une ellipse. C'est la construction qu'utilisent les jardiniers pour construire des parterres de fleurs elliptiques.

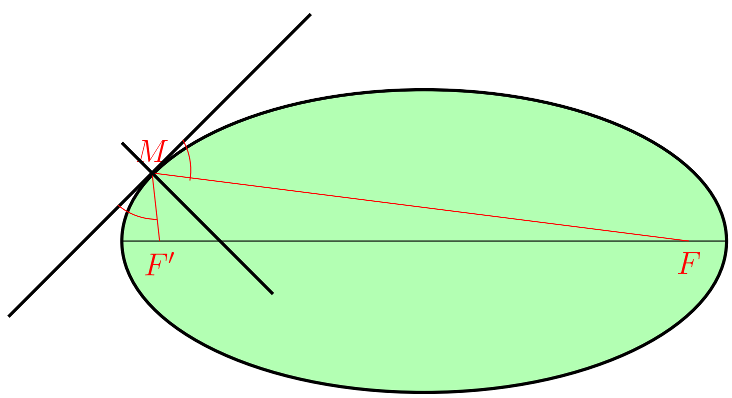
En faisant un tel dessin, ou en examinant la définition, on peut se convaincre qu'une ellipse a deux axes de symétrie : la droite qui passe par les foyers (qu'on appelle axe focal) et la médiatrice du segment $[FF']$.

Les ellipses sont connues depuis l'Antiquité et apparaissent régulièrement dans des domaines variés des mathématiques et de la physique. Ainsi la première loi de Kepler assure que chaque planète du système solaire décrit une ellipse dont le soleil est un des foyers.

2.2 Propriété optique des ellipses

De façon abusive (au moins pour un mathématicien), on appelle aussi ellipse la région du plan bordée par la courbe précédente et qui contient les foyers (c'est aussi l'ensemble des points tels que $MF + MF' \leq R$). Ce sera notre table de billard dans cette partie.

Les ellipses bénéficient d'une propriété optique remarquable illustrée dans la figure suivante et qui s'énonce ainsi, *Tout rayon issu d'un foyer, une fois réfléchi par le bord de l'ellipse, passe par l'autre foyer.*



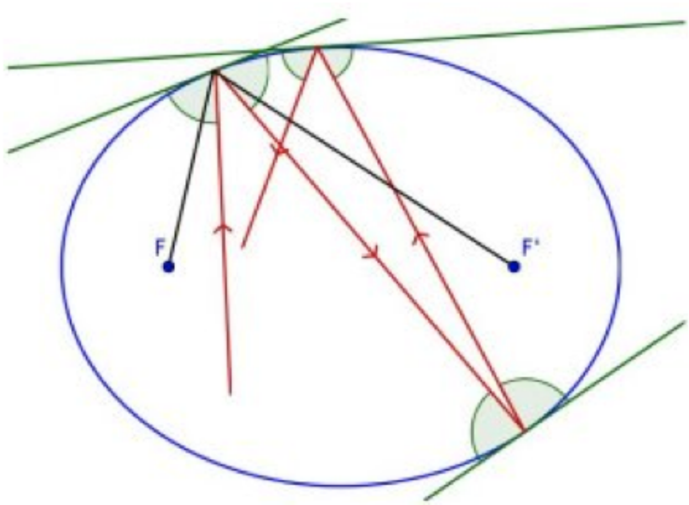
Rayon issu d'un foyer dans une ellipse

Cette propriété optique a une conséquence sur les trajectoires du billard. Pour un point M du bord, traçons la ligne brisée FMF'. La propriété optique précédente dit que cette ligne est un morceau de trajectoire (issue d'un des deux foyers, rebondissant en M et passant ensuite par l'autre foyer). Nous l'appelons séparatrice. En effet, cette trajectoire sépare les autres trajectoires rebondissant en M en deux types :

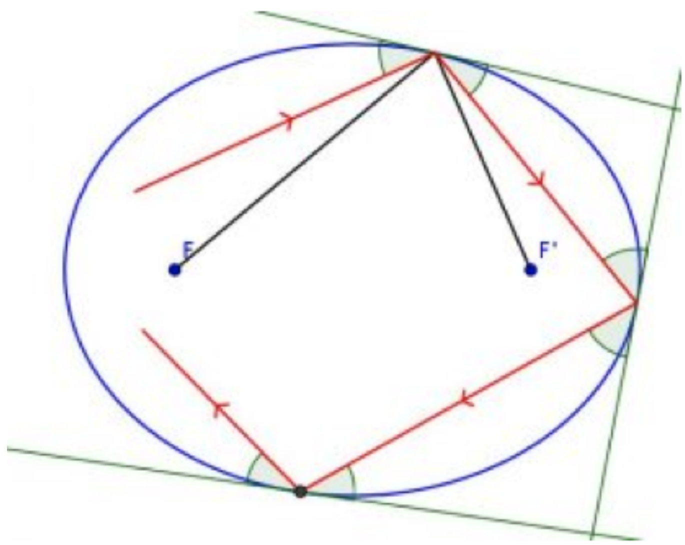
– celles qui arrivent entre les deux morceaux de la séparatrice et qui repartent de la même façon.
– celles qui arrivent entre la séparatrice et le bord (et qui repartent alors aussi entre la séparatrice et le bord),

Cette séparation influe sur l'endroit où une trajectoire du billard coupe l'axe focal.

Une trajectoire qui coupe l'axe focal entre les foyers ne le recoupera jamais à l'extérieur du segment $[FF']$ et, réciproquement, une trajectoire qui coupe l'axe focal à l'extérieur de $[FF']$ ne le recoupera jamais entre les foyers.

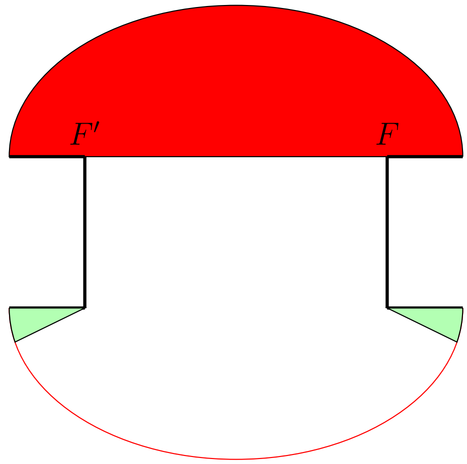


Trajectoire de type “intérieure” aux foyers dans une ellipse



Trajectoire de type “extérieure” aux foyers dans une ellipse

3 La table de billard de Penrose



Recette de Sir Roger Penrose[2] : Prenez une ellipse, coupez la le long de son axe focal (comme sur la figure ci-dessus), collez un rectangle dont les côtés verticaux passent précisément par les foyers de l'ellipse et collez l'autre moitié de l'ellipse à l'autre extrémité du rectangle.

On obtient ainsi une table de billard qui a une propriété surprenante. Tout rayon issu de la demi-ellipse "supérieure" (en rouge sur la figure) n'illuminera jamais dans les secteurs verts du bas de la figure. *Pourquoi ?*

2. Roger Penrose est un mathématicien et physicien britannique né en 1931