Maths en Jeans

Billard et problème d'Illumination

Mme Ordines

Avec l'aide de M. Pascal Hubert, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université d'Aix-Marseille

Clément Chafaie, Arthur Salles, Sacha Adjedj, Ethan Israël (1°S3)
Antoine Perrin (1°S1)

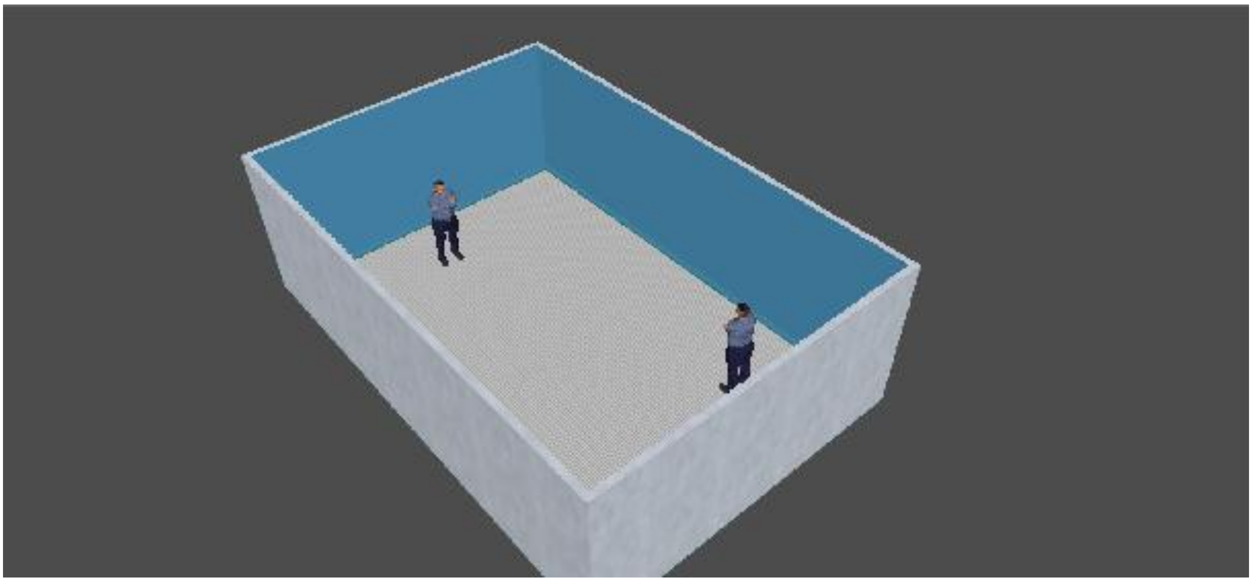
SOMMAIRE

INTRODUCTION

LE SUJET...

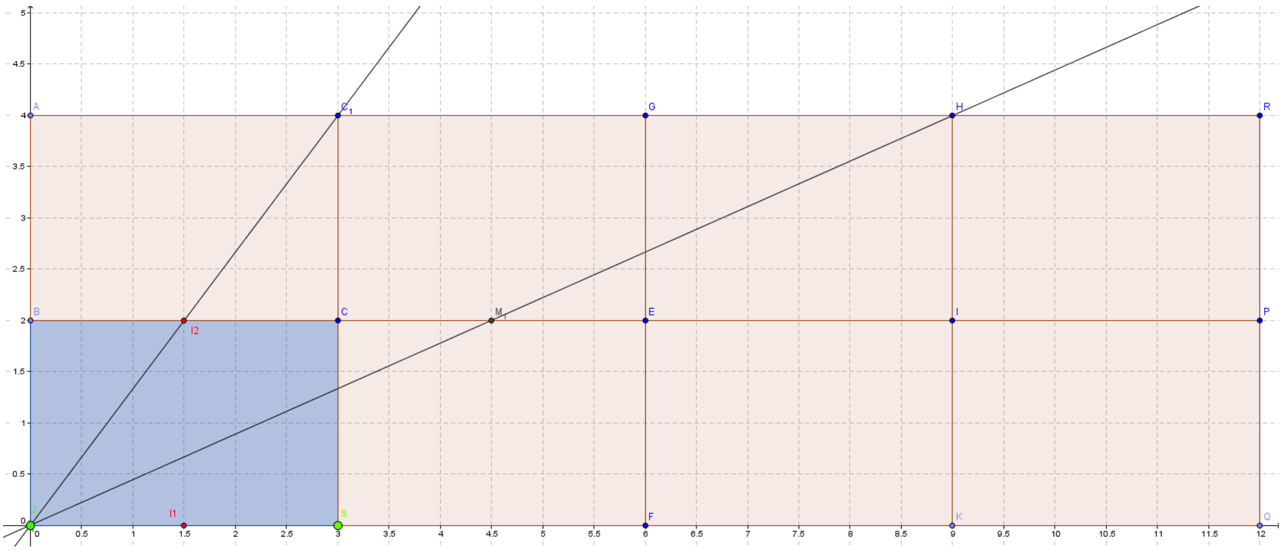
Les professeurs Smith et John ne peuvent pas se supporter et vont se trouver ensemble pour une réunion dans une pièce rectangulaire dont les murs sont des miroirs. Smith demande à ses étudiants de se placer de telle façon qu'il ne voit pas John. Où doivent se placer les étudiants de Smith ?

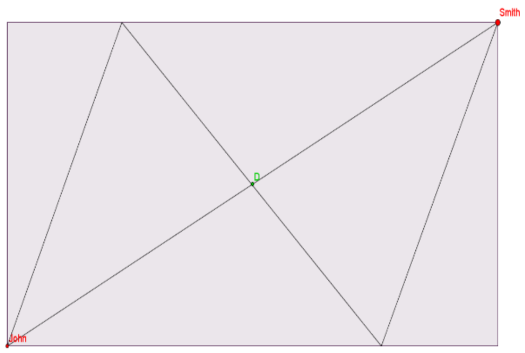
On peut se demander combien d'élèves sont nécessaires pour bloquer tous les rayons lumineux entre Smith

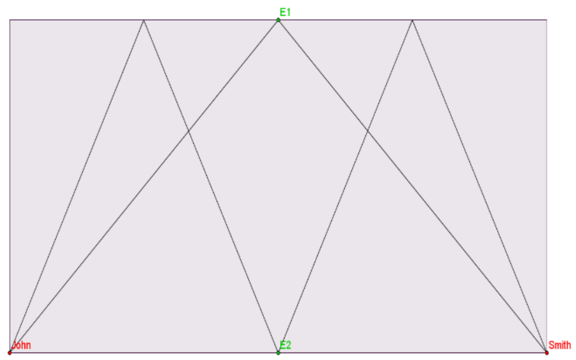


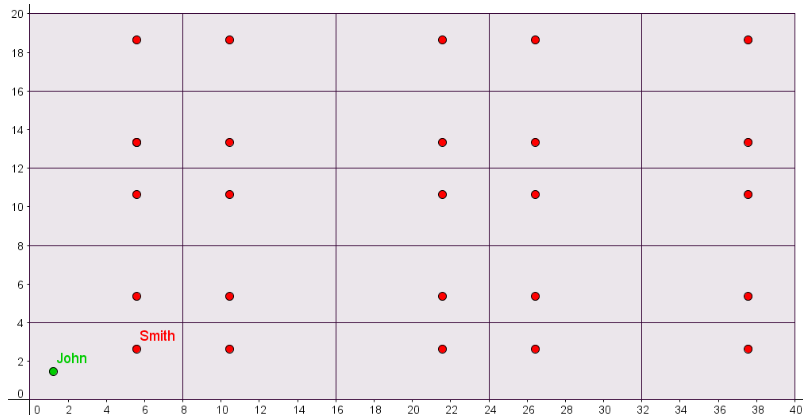
DANS LE CAS D'UNE SALLE

Démonstration





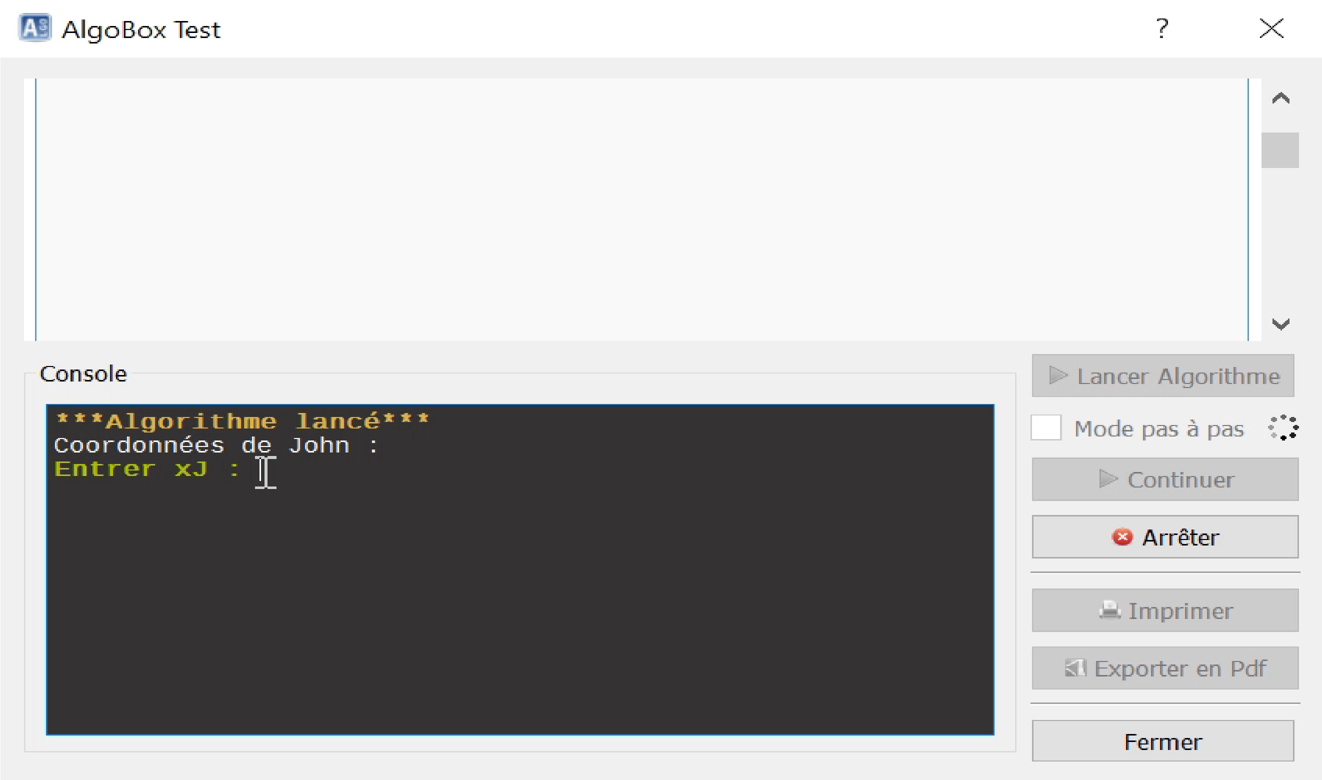




Soit un rectangle JBCS, John et Smith sont situés respectivement en J et S. Nous prenons ce rectangle que l'on déplie à l'aide des symétries axiales d'axes (CS) et (BC). Dans le repère (J, JS, JB), J a pour coordonnées (0 ; 0), les représentants de S ont pour coordonnées S (2k+1 ; 2l) où k et l appartiennent à IN.

On cherche les coordonnées du milieu I1 du segment [JS] :
On a x_I= (2k+1+0) /2 = k+1/2
Et y_I= (2l+0) /2 = l
I (k+1/2 ; L) l'ordonnée entière L veut dire que le milieu I se reporte par symétrie sur y=0 ou y=1. De plus x_I se reporte en x2=1/2. Grâce aux propriétés de la symétrie axiale on en déduit que I devient le milieu du segment [JS] ou [BC].
Donc :
y_I = l ≡ 0[1]
x_I = k+½ ≡ ½[1]
Avec D≡ r[d] ou r est le reste de la division euclidienne de D par d.

De plus nous avons réussi à mettre au point un algorithme permettant de déterminer les positions des étudiants, en fonction des positions relatives de John et Smith, ici dans un repère défini sur [0 ; 8] pour les abscisses et [0 ; 4] pour les ordonnées.



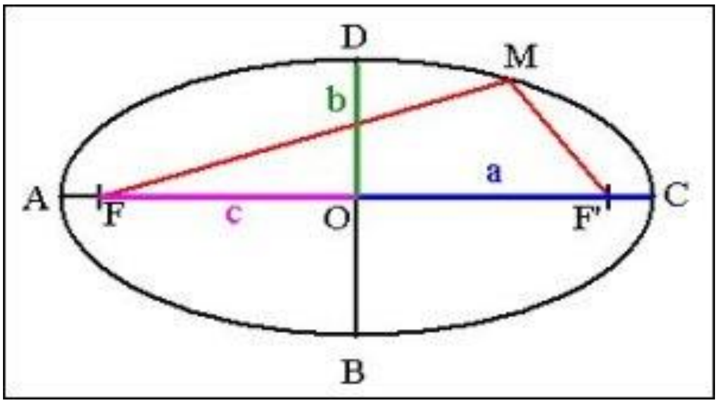
DANS LE CAS D'UNE

1° Rappels sur l'ellipse

DÉFINITION

L'ellipse est l'ensemble des points M du plan dont la somme des distances à deux points fixes du même plan est une constante donnée.
Les deux points fixes F et F' sont appelés foyers.

Pour tout point M de l'ellipse MF+MF'=2a
AC : grand axe
BD : petit axe
O : centre
F et F' : foyers
a : longueur du demi grand axe
b : longueur du demi petit axe
c : distance du centre au foyer



L'ellipse se définit aussi par son excentricité, comprise entre 0 et 1
Ainsi, plus celle-ci est faible, plus l'ellipse tend vers le cercle.

POINT DE DÉPART

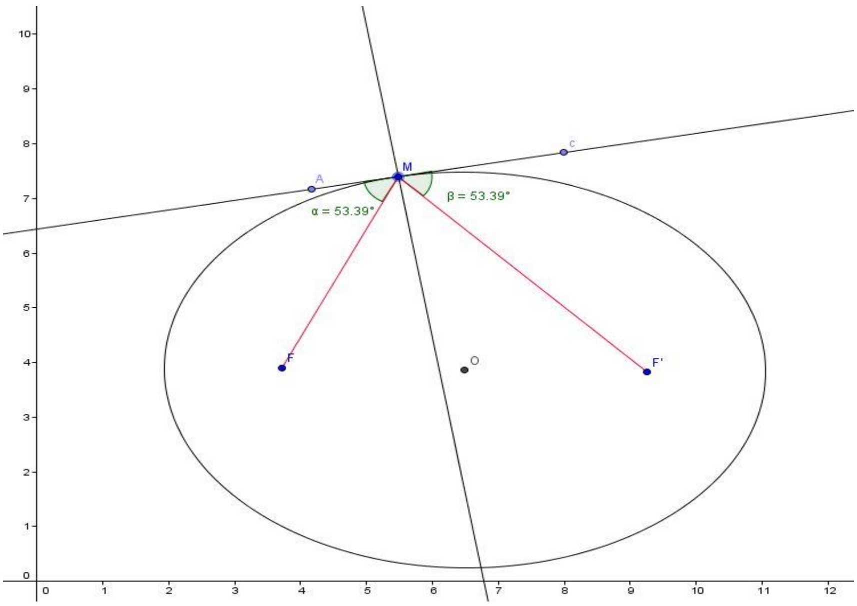
Nous nous sommes tout de suite basés sur une propriété fondamentale de l'ellipse pour résoudre le problème :
Si un rayon émerge d'un foyer, il va automatiquement être réfléchi en passant par le deuxième foyer.
On en a aussi déduit que la somme de ce rayon émergent et de ce rayon réfléchi donnait une constante

2° Démonstration

1° CAS...

On a d'abord cherché à résoudre le problème dans le cas où John et Smith sont situés précisément sur les deux foyers de l'ellipse.

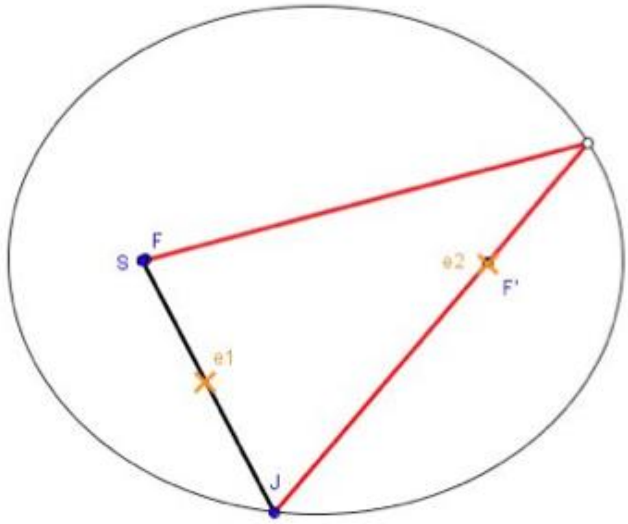
Soit F et F' les foyers de cette ellipse. John est placé sur le point F et Smith sur le point F' ; On a M un point quelconque situé sur celle-ci. D'après les propriétés de l'ellipse, tout rayon qui part d'un foyer arrive toujours sur le second en effectuant au maximum 1 rebond. Il y a donc une infinité de solutions : il est donc impossible de bloquer tous les rayons émergeants de John avec un nombre d'élèves défini.



2° CAS...

Cela fait, nous nous sommes intéressés au cas où un des deux professeurs est situé sur un foyer et l'autre sur un point quelconque de l'ellipse.
Tout d'abord, il est évident que l'on doit placer un élève e1 sur la trajectoire « directe » en noire sur le schéma. Soit un rayon émergent de John et passant par le foyer non occupé, or d'après la définition de l'ellipse, tout rayon passant par un des foyers est redirigé vers l'autre foyer, ici en rouge. On place donc un second élève, e2, sur ce foyer. Soit maintenant un rayon émergent de John sans passer par le foyer f'. On a vu que seul un rayon émergent d'un foyer peut atteindre l'autre. John n'étant pas positionné sur le foyer F', le rayon émergent

de ce dernier n'atteindra pas Smith. Il faut donc deux élèves pour bloquer tous les rayons allant de Smith à John.



3° CAS...

Nous nous sommes enfin intéressés au cas où John et Smith sont tous deux sur des points quelconques de l'ellipse.
Faute de temps et d'idées, nous n'avons pas pu résoudre le problème dans ce cas précis.

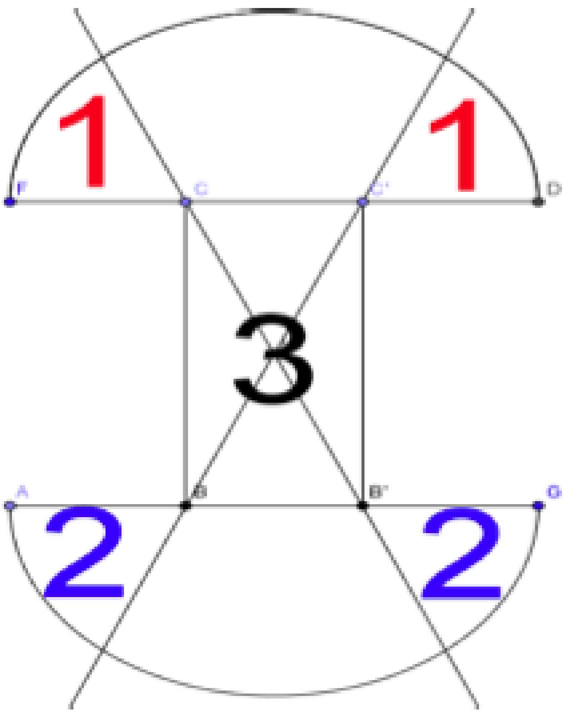
UN CAS PLUS COMPLEXE, LA TABLE

1° Définition

La table de billard de Penrose est une figure géométrique complexe qui réunit nos deux figures précédentes en une seule. Elle est composée de 2 demi-ellipses reliées par deux segments passant précisément par les foyers de l'ellipse.
Cette figure possède une propriété surprenante, en effet tout rayon issu de la demi-ellipse « supérieure » n'illuminera jamais les extrémités de la demi-ellipse « inférieure », délimitées par les diagonales. Cependant nous n'avons pas réussi à démontrer cette propriété mais nous nous en sommes servis pour étudier un autre cas d'illumination entre John et Smith.
Nous avons donc déterminé, 3 zones distinctes de la figure, elles même tracer grâce aux diagonales du rectangle et de leurs prolongements.

Ainsi on obtient trois zones :

- Deux zones d'ombres 1 et 2
- Une zone centrale



2° Réflexion

1° CAS...

Si John et Smith se trouvent tous les deux dans la zone 1 et qu'un rayon émerge de l'un des deux alors il existe une trajectoire directe entre les deux. Un élève suffirait donc pour la bloquer.

2° CAS...

Si John se trouve dans la zone 1 et Smith dans la zone 2, il n'existe aucun rayon émergeant de l'un ou l'autre qui les relient.

CONCLUSION

Cet A.P « Maths en Jeans » nous a permis de découvrir le monde de la recherche en mathématiques. Nous avons pu apprendre tout en s'impliquant dans une démarche de recherche en groupe. Bien que nous n'ayons pas pu résoudre tout le problème, nous en conserverons une excellente expérience et des connaissances accrues.

Nous souhaitons remercier Mme Ordines et Mr Hubert d'une part pour nous avoir proposé ce parcours de découverte au sein de l'établissement et d'autre part pour leur implication.